**Специальные главы математика**

УДК 517.(075)

Лабораторный практикум включает материал для повторения основных приемов работы с математическим пакетом Mathcad и методические указания по выполнению лабораторных работ.

**Содержание**

|  |  |
| --- | --- |
| Основы работы в Mathcad | 4 |
| 1. Интерфейс пользователя | 4 |
| 2. Создание формул | 6 |
| 3. Графики | 7 |
| 3.1. Двумерные графики | 7 |
| 3.2. Трехмерные графики | 12 |
| 3.3. Быстрый метод построения трехмерного графика | 13 |
| 3.4. Способ построения трехмерного графика с помощью матрицы значений | 19 |
| 4. Действия с матрицами | 19 |
| 5. Программирование в MathCad | 20 |
| Лабораторная работа №1. Теория погрешностей | 23 |
| Лабораторная работа №2,3.Метод наименьших квадратов | 37 |
| Лабораторная работа №4. Теория вероятностей. | 49 |
| Лабораторная работа №5,6. Приложения теории вероятностей. Статистика. | 67 |
| Лабораторная работа №7. Теоретические распределения. Основные характеристики распределений | 73 |
| |  |  | | --- | --- | | Лабораторная работа №8. Числовые характеристики дискретных случайных величин. |  | | Лабораторная работа № 9. Проверка статистических гипотез. |  | | Литература |  | |  |  | |  |  | | 79  85  104 |

**ОСНОВЫ РАБОТЫ В MathCad**

Объекты программы MathCad: формулы и текстовые блоки, – располагаются в документе MathCad, который называется рабочий лист. В процессе выполнения расчетов формулы обрабатываются постепенно, слева направо и сверху вниз.

Ввод информации выполняется в место положения курсора, который может быть представлен в одном из трех видов:

1) курсор в виде крестика используется, если этот курсор определяет местоположение следующего объекта;

2) угловой курсор используется при введении формул. Этот курсор указывает на текущий элемент выражения;

3) текстовый курсор (I-образная вертикальная черточка) используется при введении текста.

**1. Интерфейс пользователя**

Математических панелей в MathCad девять. Приоткрываются панели с помощью соответствующих команд панели Math (Математические) (рис.1), однако можно использовать и стандартный метод обращения к меню Toolbars (Инструменты), меню Vіew (Вид).

Кратко охарактеризуем все панели семейства Math (Математические).

– Calculator (Калькулятор, Арифметика). На данной панели расположены арифметические операторы, цифры от 0 до 9, наиболее распространенные функции и математические константы, а также операторы вывода (рис.1, а).

– Graph (Графические, Графики). С помощью этой панели можно вызвать шаблоны для построения разнообразных графиков и поверхностей. На панели также расположены ссылки на инструменты для анализа данных (рис.1, б).

– Matrіx (Матричные, Матрица). На панели расположены операторы создания, обращение, транспонирование матриц, а также операторы матричных индексов и колонок. На панели также расположены операторы для работы с векторами (рис.1, в).

– Evaluatіon (Выражения). На панели находятся ссылки на все операторы ввода и вывода в MathCad, а также шаблоны для создания пользовательских операторов (рис.1, г).

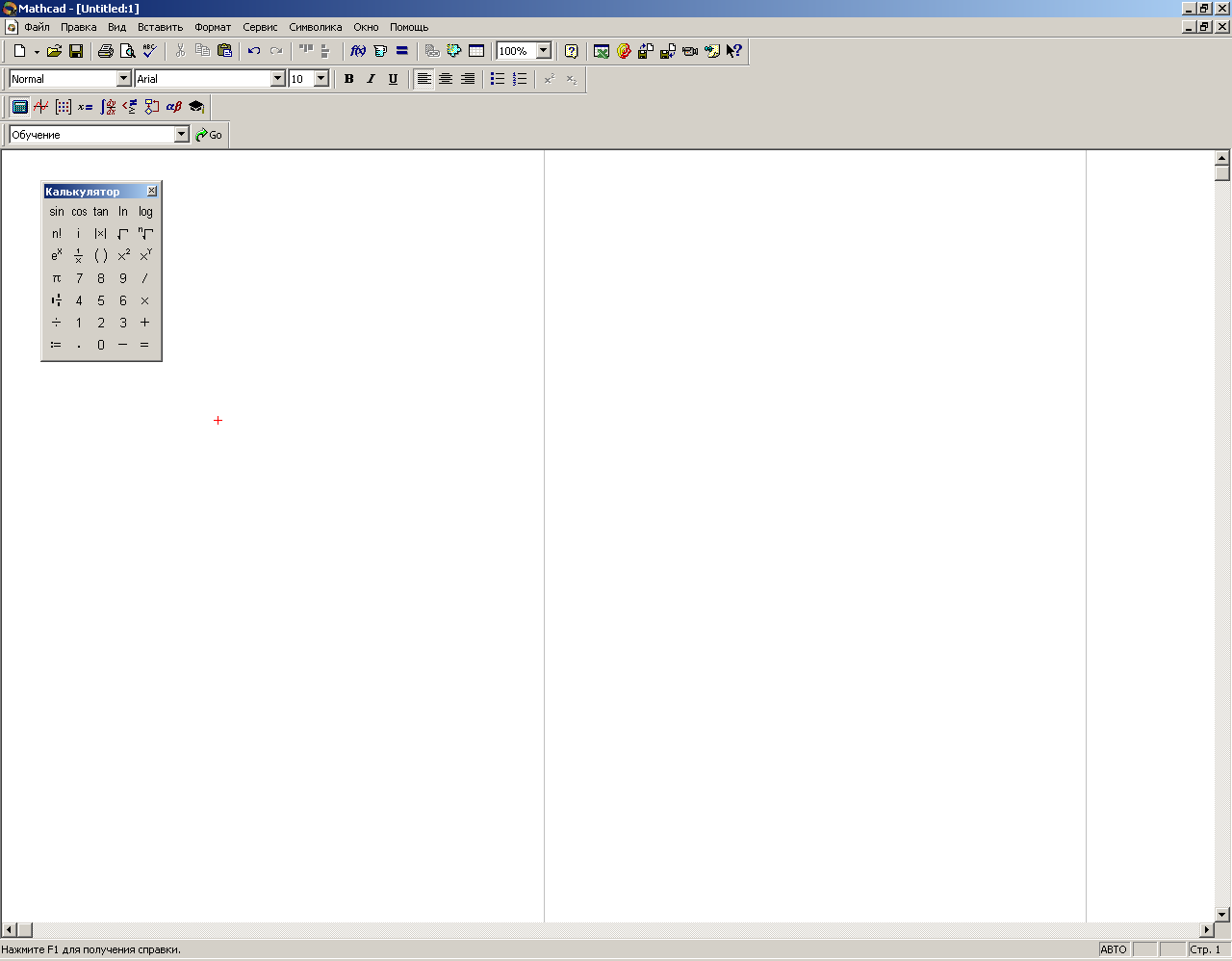
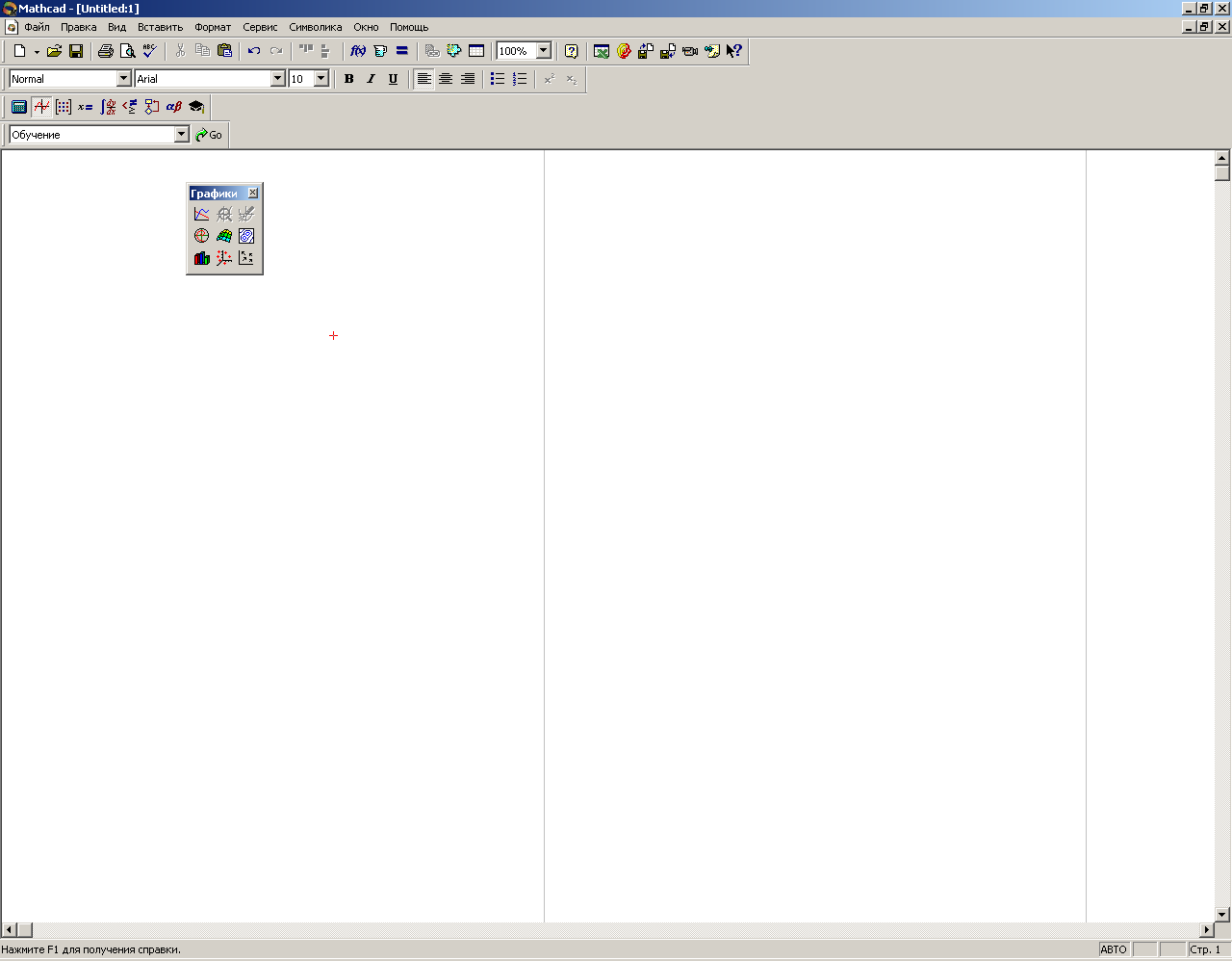
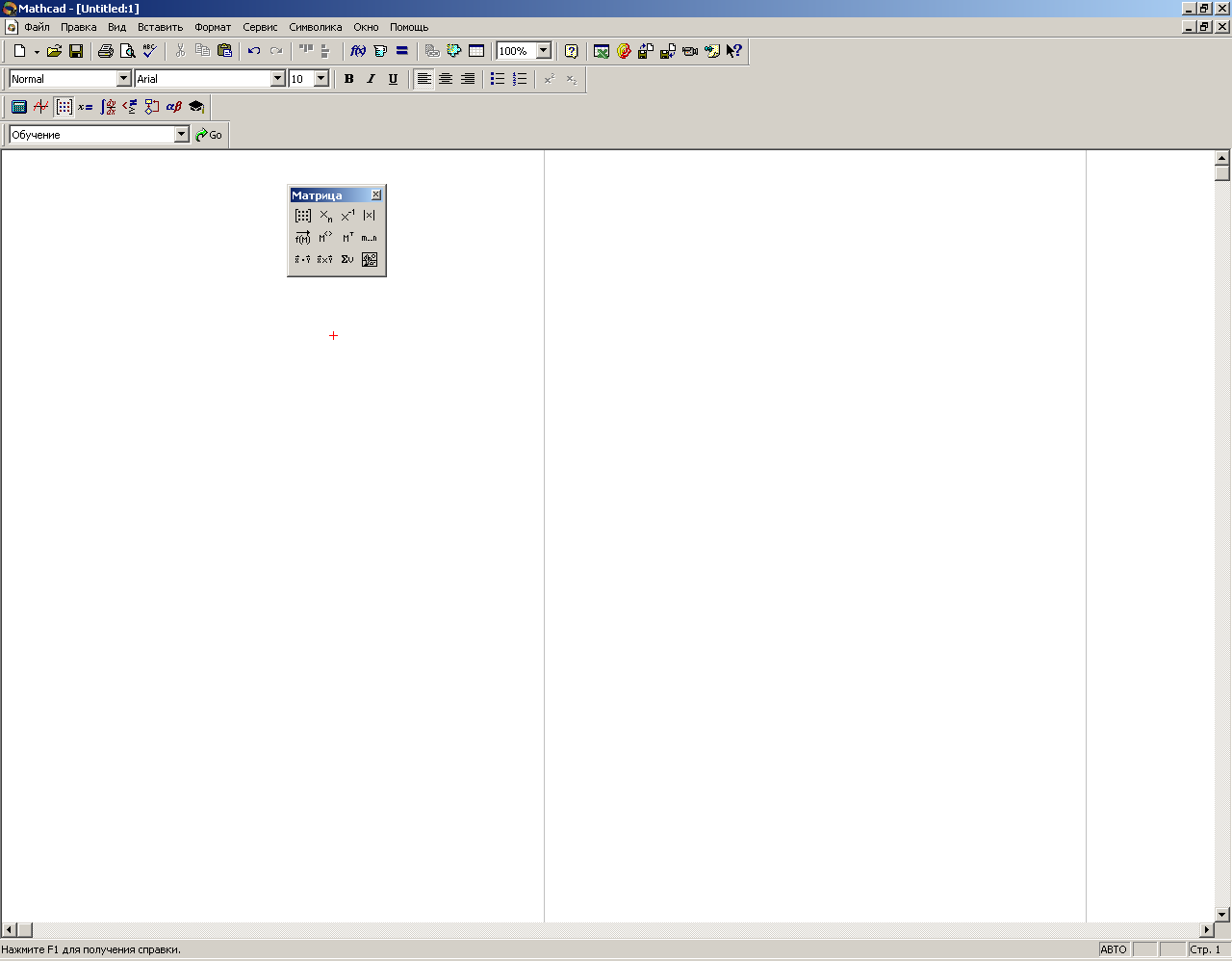
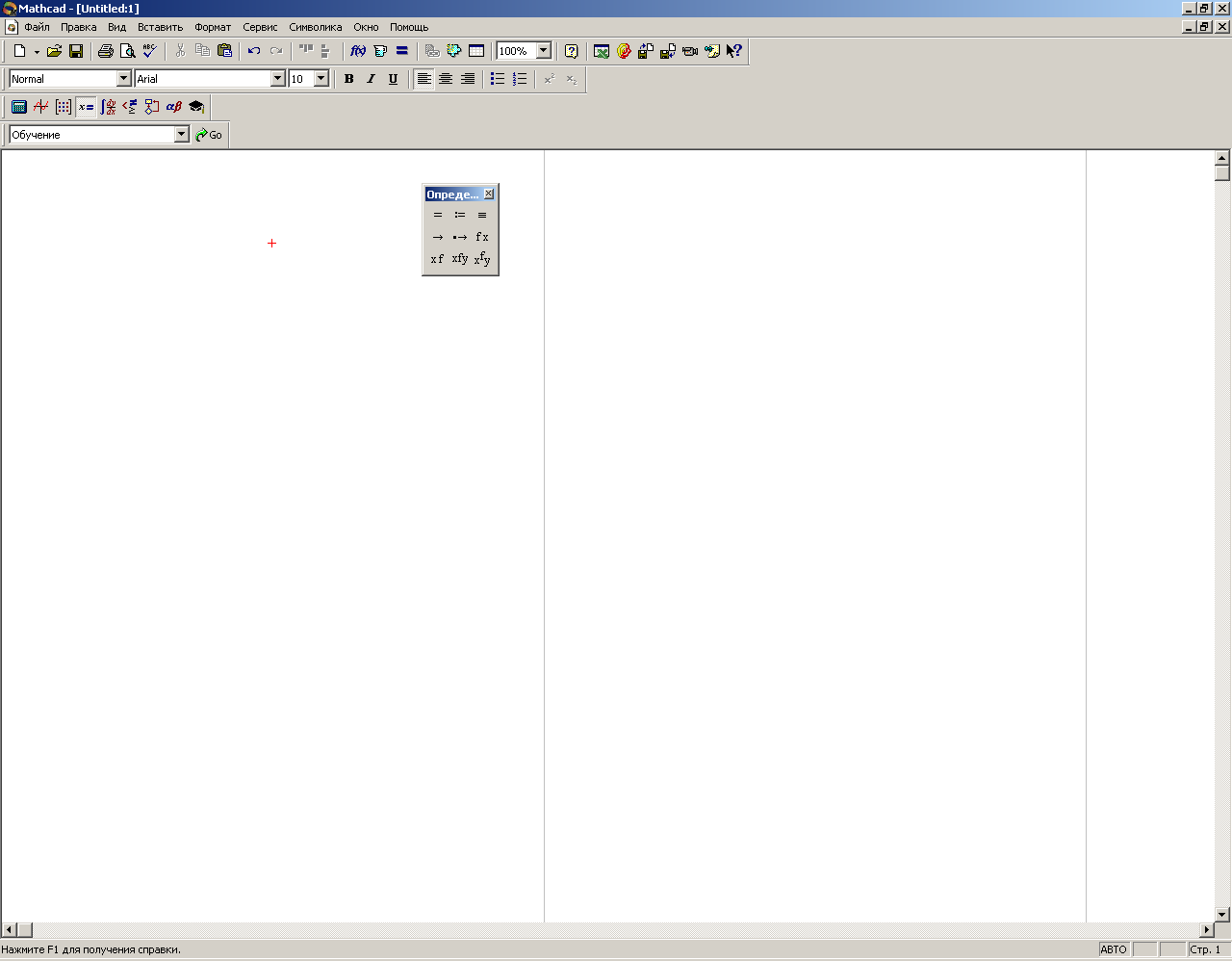
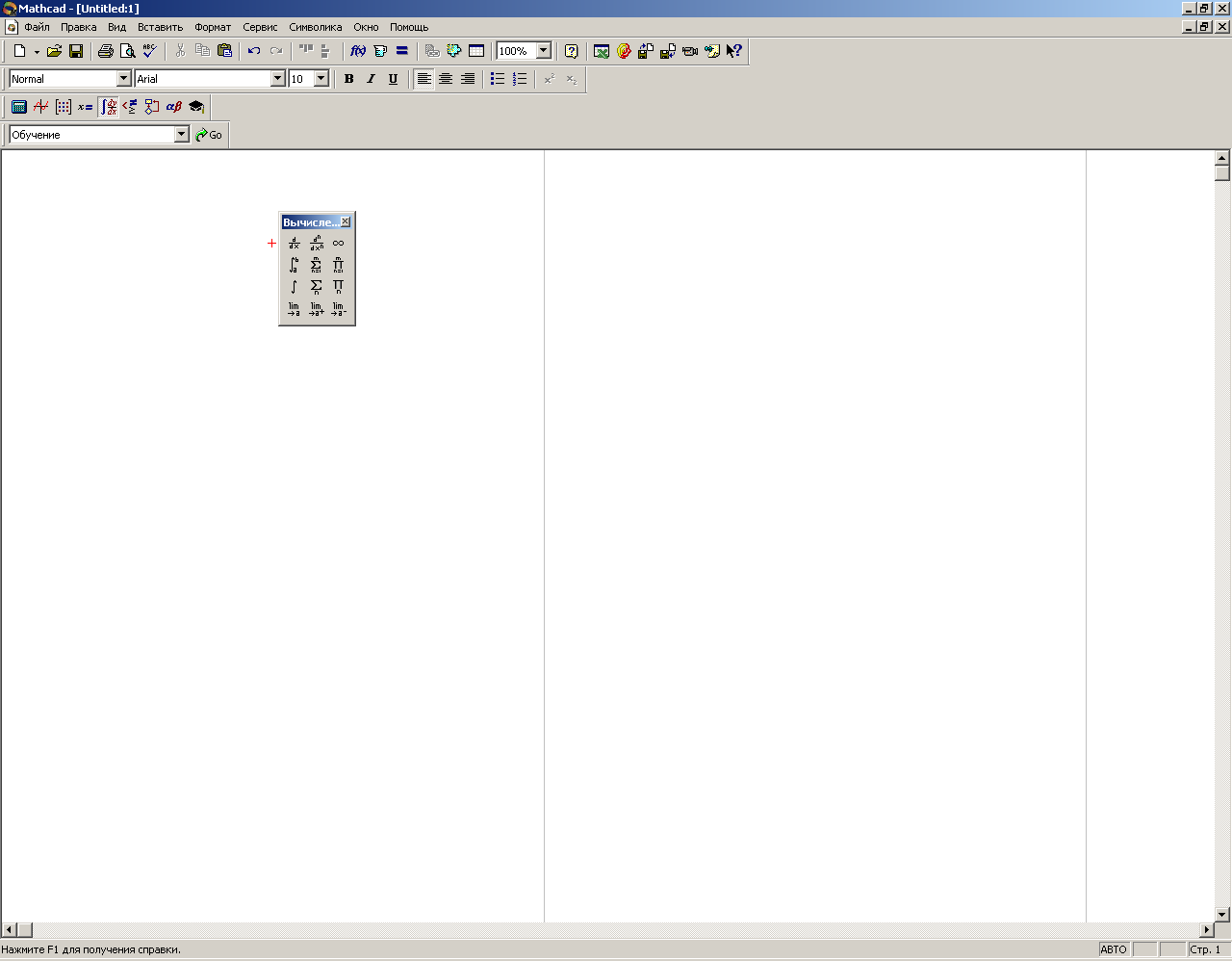
– Calculus (Вычислительные, Вычисление, Матанализ). На панели находятся применяемые при решении задач математического анализа операторы: определенного и неопределенного интегралов, производных, лимитов, сложений и произведений, символ бесконечности (рис.1, д).

– Boolean (Булевые, Логика). Эта панель предназначена для задания логических операторов (рис.1, е).

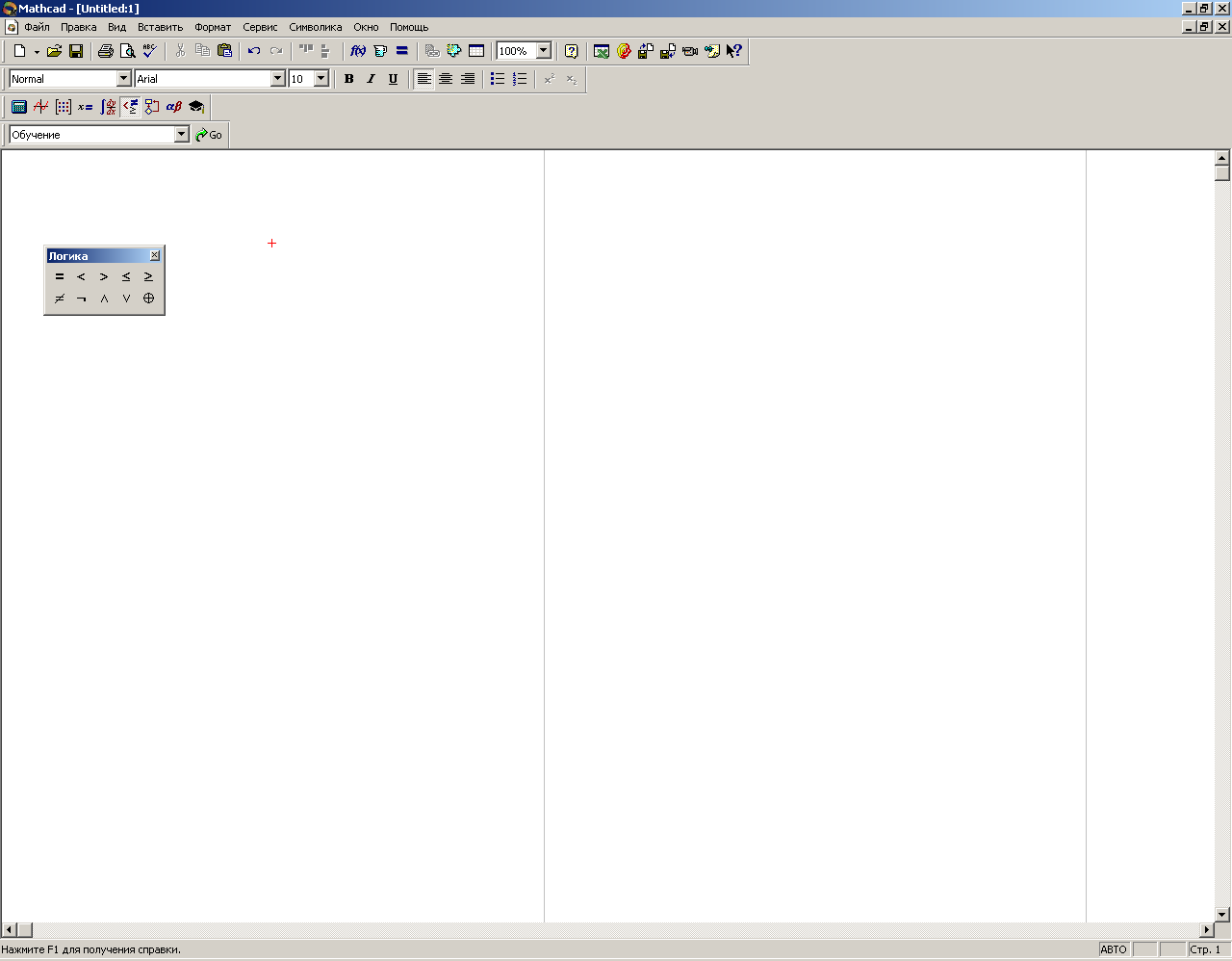
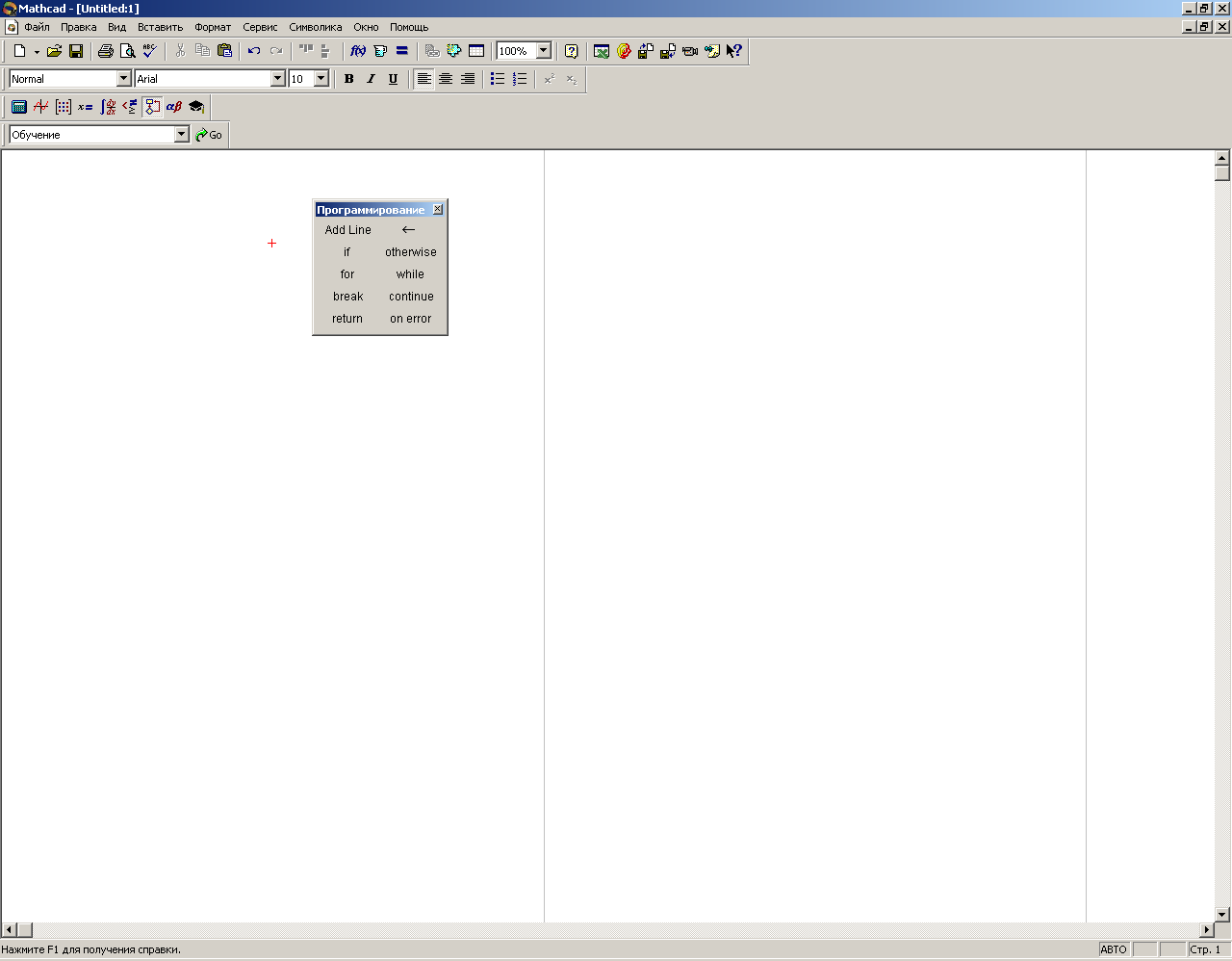
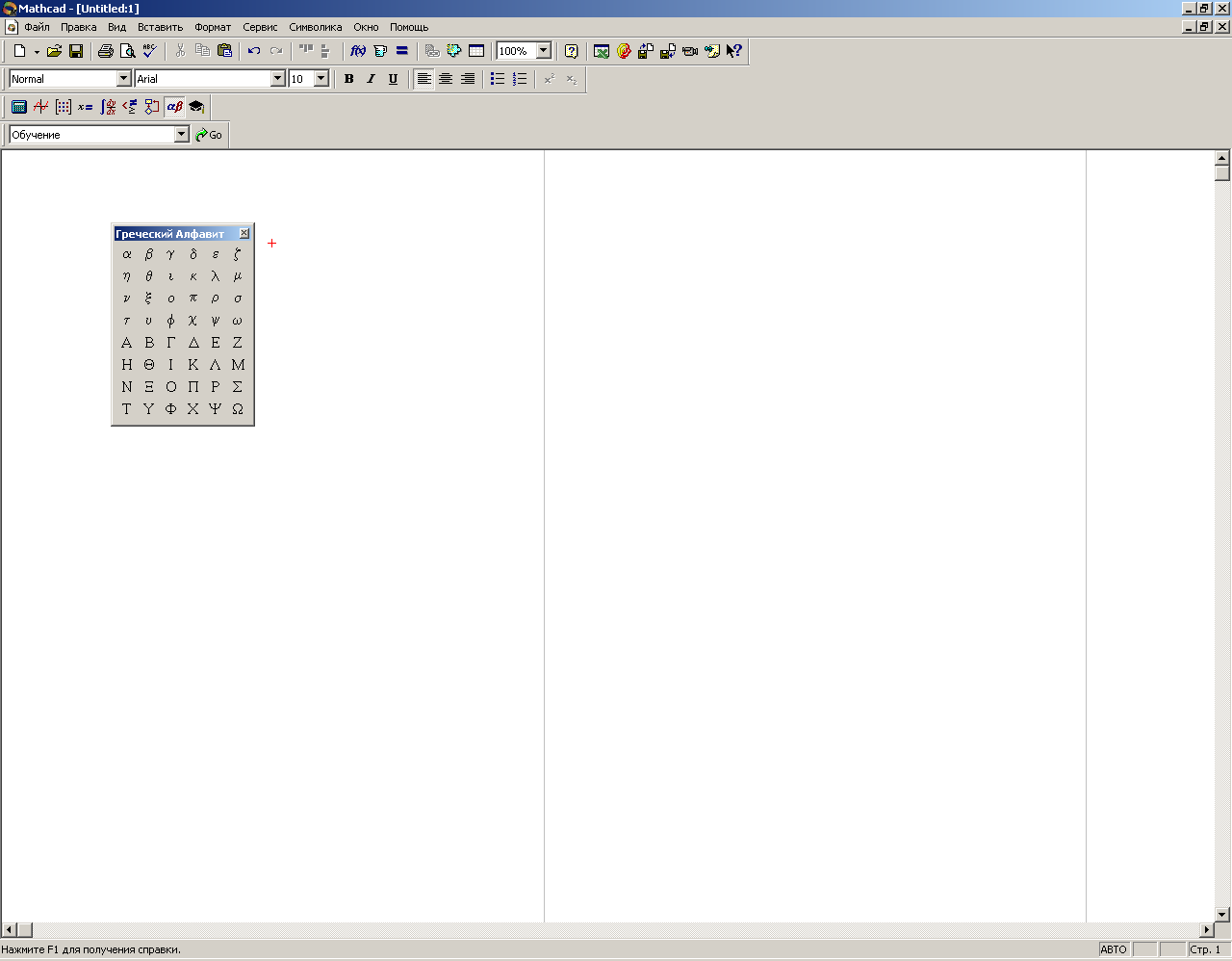
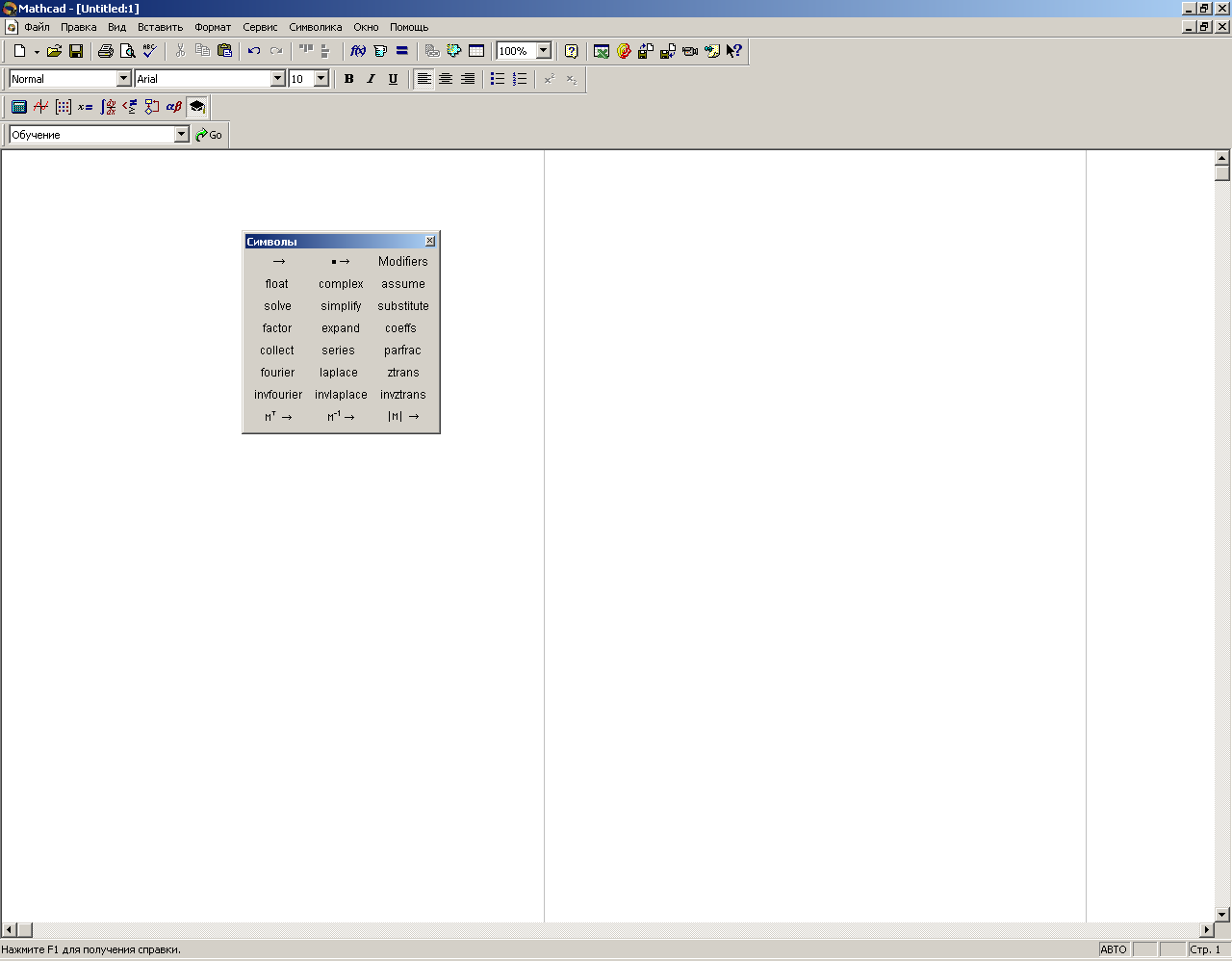
– Programmіng (Программирование). Панель содержит операторы языка программирования MathCad (рис.1, ж).

– Greek (Греческие, Греческий Алфавит). На данной панели расположенные буквы греческого алфавита (рис.1, з).

– Symbolіc (Символика, Символы). Панель предназначена для проведения аналитических преобразований (рис.1, и).

а) б) в) г) д)

е) ж) з) і)

Рисунок 1 – Математические панели инструментов программы MathCad

**2. Создание формул**

Формулы - основные объекты MathCad. Новый объект по умолчанию является формулой. Для того, чтобы начать ввод формулы необходимо установить крестообразный курсор в нужное место и начать ввод букв, цифр, знаков операций. При этом создается область формулы, в которой появляется угловой курсор.

Элементы формул можно вводить с клавиатуры или с помощью панелей.

Формулы, которые введены в MathCad, автоматически приводятся к стандартной научно-технической форме записи.

В программе MathCad можно использовать буквенные определения, которым сопоставляются числовые значения, и которые рассматриваются как переменные. Буквенные значения задаются с помощью оператора присваивания (он вводится символом "**:=**"). Таким же образом можно задавать числовые последовательности, аналитически определенные функции, матрицы, векторы.

При введении бинарного оператора за знаком операции автоматически появляется заполнитель в виде прямоугольника, в это место вводится следующий операнд. Для управления порядком операций используются круглые скобки, которые можно вводить вручную. Угловой курсор разрешает автоматизировать такие действия:

– для выделения элементов формулы, которые в рамках операции должны рассматриваться как одно целое, используется клавиша Space;

– при нажатии каждого раза на клавишу Space угловой курсор расширяется, включая элементы формулы, которые расположены рядом с данным;

– после введения знака операции элементы в пределах углового курсора автоматически заключаются в скобки.

Если все значения переменных известны, то для вычисления числового значения выражения (скалярного, векторного или матричного) необходимо подставить все числовые значения и выполнить заданные действия. В программе MathCad применяется оператор вычисления, который вводится символом "=". Кроме того, есть возможность задавать значение известных параметров, провести вычисление с представлением аналитическими формулами, результат присвоить некоторой переменной, а потом использовать оператор вычисления для вывода значения этой переменной.

При изменении любой формулы программа автоматически выполняет необходимые вычисления, обновляя при этом значения и графики, которые изменились.

**3. Графики**

В Mathcad встроено несколько типов разных графиков, которые можно разбить на две группы: двумерные и трехмерные графики.

Все основные типы графиков и инструменты работы с ними расположены на рабочей панели Graph (Графические) семейства Math (Математические) (рис.2,б):

– График кривой в двумерной декартовой системе координат (X-Y Plot).

– График кривой в полярной системе координат (Polar Plot).

– Поверхность (Surface).

– Контурный график (Contour Plot).

– Столбиковая трехмерная (3D) диаграмма (3D Bar Plot).

– Точечный трехмерный (3D) график (3D Scatter Plot).

– Векторное поле (Vector Field).

Аналогично панели Graph (Графические) список всех типов графиков Mathcad расположен в одноименном подменю меню Insert (Вставка).

**3.1. Двумерные графики**

В Mathcad существует несколько способов задания кривых в декартовой системе координат, однако первый шаг для всех один и тот же.

Первым шагом есть введения специальной заготовки для будущего графика - так называемой графической области. Ввести графическую область как для декартового, так и для любого другого графика можно: из панели Graph (Графические), командой одноименного меню Іnsert (Вставка) или нажатием комбинации клавиш Shіft+2.

Графическая область представляет собой две вложенные рамки. Во внутренней отображаются непосредственно кривые зависимости. Пространство между рамками служит для визуализации разного рода служебной информации. Графическую область можно увеличивать и уменьшать с помощью специальных маркеров, расположенных на ее внешней рамке. Перемещать по документу и удалять графические области можно так же, как простые формулы. Окно форматирования вида графической области (Propertіes (Свойства) также целиком совпадает с аналогичным окном для формул. Открыть его можно с помощью одноименной команды контекстного меню графика (вызывается щелчком правой кнопкой мыши на графической области).

В окне Properties (Свойста) могут быть полезными два параметра, расположенных на вкладке Display.

– Highlight Region (Цветная область). Установив этот флажок можно на палитре Choose Color (Выбор цвета) определить наиболее подходящий цвет заливки для графической области.

– Show Border (Показать границу). Параметр отвечает за отображение внешней границы графической области. По умолчанию граница не визуализируется.

После того как графическая область будет введена, в общем случае нужно задать два размерных вектора, которые определяют значение координат точек. Сделать это можно разными способами.

Наиболее простым методом задания координатной сетки есть так называемый быстрый метод. При его применении пользователь задает только имя переменной и вид функции, а шкалы осей и величину шага между узловыми точками автоматически определяет система. Чтобы построить кривую функции быстрым методом, можно выполнить следующую последовательность действий.

1. Ввести графическую область.

2. В специальном маркере, расположенном в центре под внутренней рамкой графической области, задать имя переменной.

3. В центральный маркер, расположенный по левую сторону от внутренней рамки, ввести функцию или имя функции.

К недостаткам рассмотренного метода относится прежде всего то, что область изменения переменной для всех функций определяется одинаково: от -10 до 10.

Для того, чтобы изменить область изменения, нужно просто уменьшить интервал изменения переменной или функции. Для этого необходимо выделить графическую область щелчком левой кнопки мыши. Непосредственно под крайними значениями (для оси X) или по левую сторону от них (для оси Y) появятся цифры, которые отражают максимальные и минимальные величины координат узловых точек графика. Чтобы изменить их значения необходимо удалить старые величины и ввести другие. Изменения границ по оси X вызывает автоматический перерасчет крайних значений по оси Y.

На практике же, как правило, приходится определять границы сразу по обеим осям. Это связано с тем, что хорошо подобрать интервал по оси значений функции системе удается далеко не всегда. Это можно сделать для настраивания вида графика рассмотренной функции, изменяя диапазон как по оси X, так и по оси Y.

В ряде случаев намного удобнее задать векторы данных самостоятельно. Выполнить это можно с помощью оператора ранжированной переменной (вводится из панели Matrіx (Матричные)).

Чтобы задать вектор значений переменной с помощью оператора Range Varіable (Ранжированная переменная), выполняется следующая последовательность действий.

1. Ввести имя переменной вместе с оператором присваивания.

2. Задать левую границу интервала построения и поставить запятую.

3. Ввести оператор ранжированной переменной.

4. В левом маркере введенного оператора задать вторую точку на промежутке (тем самым определяется шаг).

5. В правый маркер оператора ранжированной переменной вводится значение правой границы на интервале.

В результате переменная и функция будут заданы в виде двух размерных векторов, по которым будет построен график.

Использование способа построения графика с помощью оператора ранжированной переменной имеет очень важное преимущество перед быстрым методом, поскольку позволяет задавать произвольным образом шаг между узловыми точками.

Построить график в Mathсad можно и по готовым векторам или таблицам данных, полученных, например, при эксперименте или выполнении лабораторной работы.

В Mathсad на одну графическую область можно поместить до 16 кривых. Чтобы добавить к уже имеющемуся графику еще один, можно выполнить следующую последовательность действий.

1. Установить курсор по правую сторону от выражения, которое определяет координаты последнего ряда данных по оси Y (предварительно выделив его).

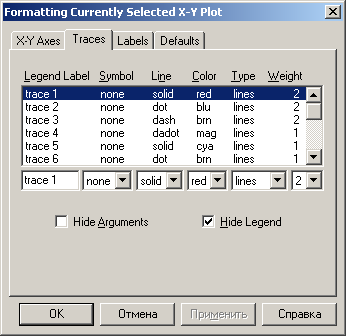
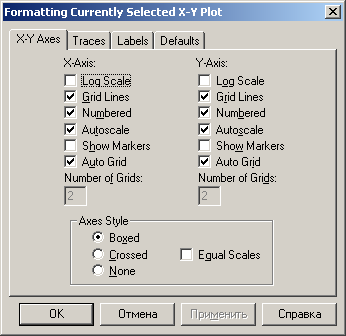
2. Опустить курсор на строку ниже, нажать на знак запятой (,) и в маркер, который появился, ввести выражение для новой функции или имени функции.

С помощью описанного метода можно построить графики функций одной переменной. Если же кривые, которые нужно отобразить на одной области, зависят от разных переменных, то их, полностью аналогично добавлению новых функций, следует ввести через запятую в нижний маркер в том же порядке, в котором вводились соответствующие им функции.

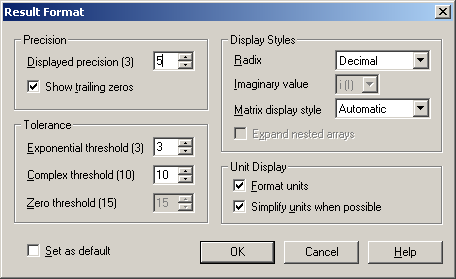
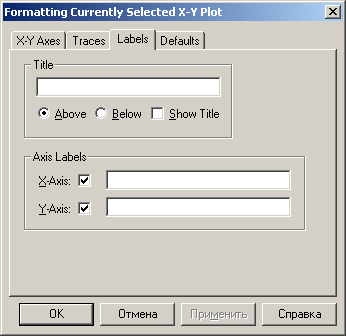
Задание графиков в полярной системе координат с технической точки зрения не имеет ровно никаких принципиальных отличий от создания графиков на декартовой плоскости. Для начала нужно ввести графическую область. Выполнить это можно или с помощью специальной кнопки Polar Plot (Полярный график) панели Graph (Графические), или комбинацией клавиш Ctrl+7. Как и в случае зависимости X-Y, для полярного графика существует два основных метода построения: быстрый способ построения и использование ранжированных переменных. При задании полярной системы координат по быстрому методу система автоматически определит область изменения угла от 0 до 360°. В отличие от области изменения угла, величину диапазона полярного радиуса можно задать произвольным образом непосредственно на графической области.

Для форматирования графика необходимо дважды нажать на область графика. Для управления отображением линий на графику существует вкладка Traces (Линии) (рис.2, а), где приведен формат каждой линии и элементы управления изменением формата. Поле Legend Label (Описание) задает описание линии, которое отображается, если снять флажок Hіde Legend (Закрыть описание) (рис. 2,б). Маркеры для отдельных точек можно выбрать из списка Symbol (Символ), из списка Lіne (Тип линии) выбирается тип линии, а из списка Color (Цвет) - цвет графика. Список Type (Тип) определяет средство связи отдельных точек графика, а список Weіght (Толщина) - толщину линии на графике (рис.2,в). Форматирование данных графика выполняется с использованием диалогового окна Result Format (рис.2, г).

Аналогично можно построить и отформатировать график в полярных координатах. Для его построения нужно воспользоваться командой Іnsert/ Graph/Polar Plot.



а) б)



в) г)

Рисунок 2 – Диалоговые окна для форматирования графиков

**3.2. Трехмерные графики**

Для построения трехмерных графиков можно использовать наиболее простой и практически важный, быстрый метод построения трехмерного графика (QuіckPlot). В его основе лежит тот же принцип, который используется и при быстром задании двумерной зависимости: пользователь определяет только вид функции, а все параметры построения, такие как шаг между узловыми точками, диапазон шкал осей и система координат, задаются автоматически системой.

Типы трехмерных графиков следующие:

Contour Plot - график линий уровня (график поверхности);

3D Bar Plot - график трехмерной гистограммы;

3D Scatter Plot - график множества точек;

Vector Fіeld Plot - график векторного поля. График векторного поля немного отличается от других типов двумерных графиков. Его содержание заключается в построении некоторого вектора в каждой точке плоскости *XY*. Чтобы задать вектор на плоскости, необходимы два скалярных числа. Поэтому в Mathсad принято, что векторное поле задает комплексная матрица. Действительные части каждого ее элемента задают проекцию вектора на ось *х*, а мнимые - на ось *Y*.

Чтобы создать трехмерный график, нужно нажать кнопку с изображением каждого из типов трехмерных графиков на панели инструментов Graph (Графики). В результате появится пустая область графика с тремя осями (рис. 3) и единым заполнителем в нижнем левом углу. В этот заполнитель ввести или имя *z* функции *z(x,y)* двух переменных для быстрого построения трехмерного графика, или имя матричной переменной *z,* которая задает функцию *z(x,y)* на плоскости *XY*.

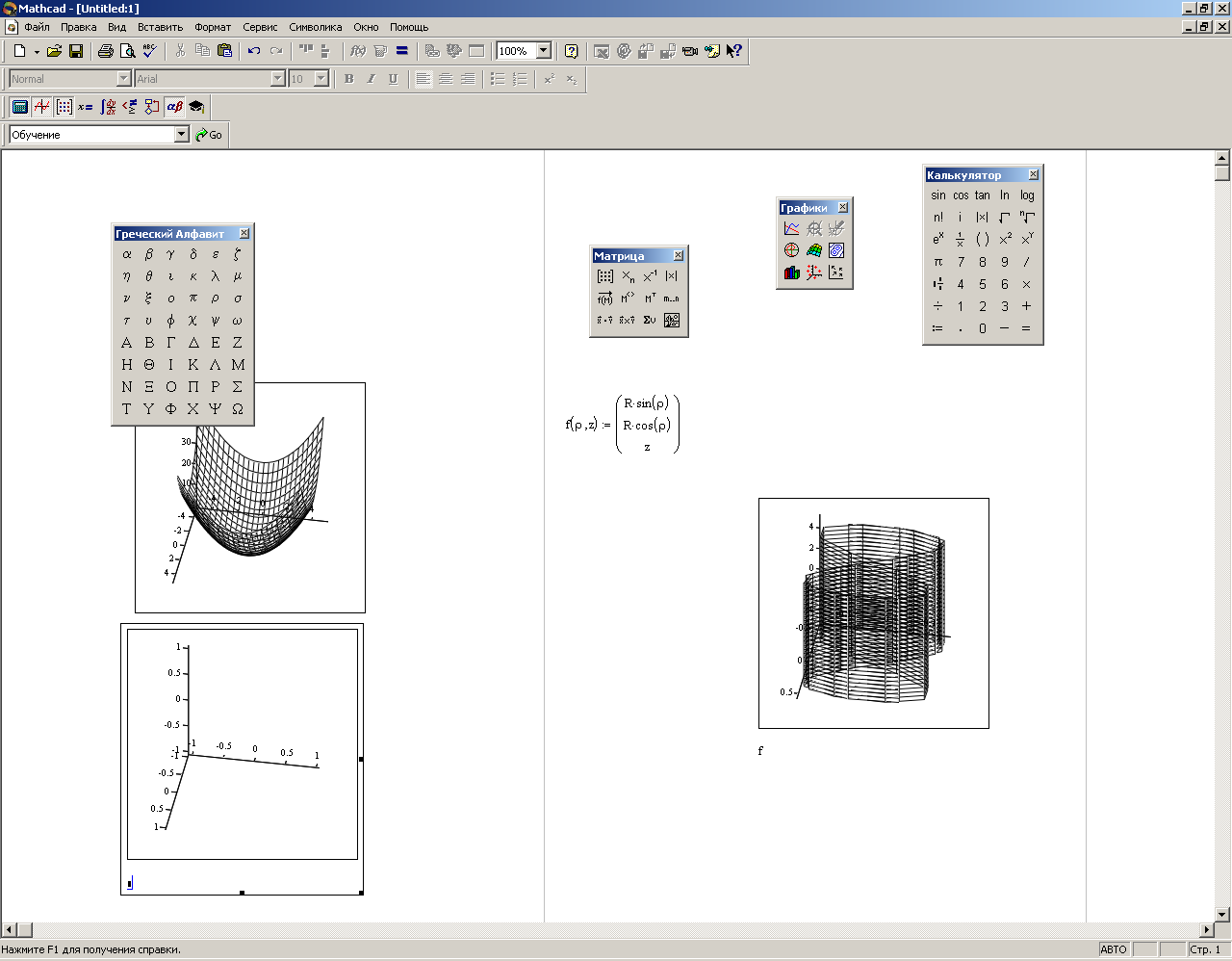


Рисунок 3 – Область для создания трехмерных графиков

**3.3 Быстрый метод построения трехмерного графика**

Последовательность создания трехмерного графика с использованием быстрого метода построения трехмерного графика (QuіckPlot) следующая.

1. Сначала необходимо ввести графическую область трехмерного графика. Аналогично зависимости *X-Y*, сделать это можно тремя стандартными способами: нажатием кнопки Surface Plot (Поверхность) панели Graph (Графические), использованием одноименной команды меню Іnsert (Вставка) или нажатием комбинации клавиш Ctrl+2.

Для построения трехмерных графиков существует только один маркер заполнения. В общем случае в нем должен быть прописан массив, который содержит координаты узловых точек по всем трем осям.

2. После того как графическая область введена, следует задать вид функции, которая определяет трехмерную область. В отличие от *X-Y*-зависимостей, просто ввести ее выражения в маркер нельзя - при этом будет выдано сообщение об ошибке: Thіs varіable іs undefіned (Данная переменная не определенна). В маркер графической области вводится имя заданной функции, для которой строится трехмерный график. Однако, в отличие от двумерного случая, прописанным должен быть лишь непосредственно текст имени, без переменных в скобках. При использовании данной методики поверхность задается на стандартном интервале от -5 до 5 для переменных. Такой диапазон во многих случаях может быть неприемлемый. Для форматирования параметров графиков быстрого построения существует специальная вкладка Quіck Plot Data (Данные графика быстрого построения) окна форматирования трехмерных графиков 3D-Plot Format. Открывается это окно двойным нажатием левой кнопки мыши на графической области или с помощью команды Format (Формат) ее контекстного меню (рис. 5). Все параметры настройки графика быстрого построения расположены на вкладке Plot 1 (График 1). В общем случае таких вкладок может быть больше, это связано с тем, что на одной графической области может быть размещено несколько поверхностей. Чтобы это выполнить, просто вводятся через запятую имена функций, графики которых должны быть построены. Вкладка Plot 1 (График 1) содержит три меню настраивания, два из которых: Range 1 и Range 2 (Ряд 1 и Ряд 2), идентичны друг другу. Эти меню отвечают за характеристики сетки построения поверхности вдоль каждой из осей переменных (соответствие переменной ряда определяется последовательностью введения ее при задаче имени функции) и содержат следующие параметры настраивания:

– Start (Начало). В поле данного параметра можно произвольным образом задать начальную точку построения прямоугольника по данной оси.

– End (Конец). В поле данного параметра определяется конечная точка интервала.

– # of Grіds (Количество линий сетки). Параметр определяет, на какое количество отрезков будет разбит интервал построения для выбранной переменной (что отвечает числу отображенных линий сетки). Эта величина обратная шагу изменения переменной.

Когда сетка разбивки задана, исчисляются значение функции в ее узлах. Если остановиться на этом этапе и визуализировать только точки, то будет построен так называемый точечный график (Data Poіnts). Каждая точка соединяется с соседней при помощи отрезков прямых, при этом применяются сглаживание и другие графические эффекты, в результате чего, в зависимости от величины шагов сетки, выходит более или менее гладкая поверхность.

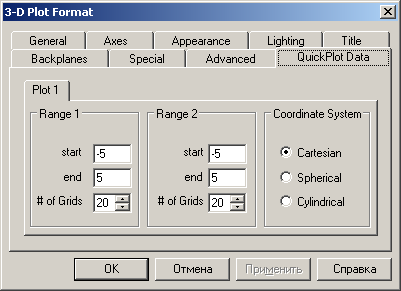


Рисунок 4 – Окно для форматирования трехмерных графиков

Третье меню вкладки Plot 1 (График 1) - Coordіnate System (Система координат) определяет, в какой системе координат следует отобразить данную зависимость. Возможные следующие варианты:

– Cartesіan (Декартова). График отображается в декартовой системе координат.

– Spherіcal (Сферическую). График отображается в сферической системе координат.

– Cylіndrіcal (Цилиндрическая). График отображается в цилиндрической системе координат.

В диалоге 3-D Plot Format (Форматирование 3-D графика) доступно большое количество параметров, изменение которых способно повлиять на внешний вид графика. Они сгруппированы по принципу действия на нескольких вкладках.

*Изменение типа графика.* Чтобы изменить тип уже имеющегося графика (например, построить вместо поверхности график линий уровня и т.д.), надо установить соответствующий переключатель в нижней части вкладки General (Общие) и нажать кнопку ОК. График будет преобразован (рис.5).

*Обращение графика.* Простейший способ ориентации системы координат с графиком в трехмерном пространстве - это перетаскивание ее указателем мыши. Можно перемещать при нажатой левой кнопке мыши указатель в границах графика, и будет видно, как вращается график.

*Изменение ориентации графика.* С помощью полей Rotatіon (Вращение), Tіlt (Наклон) и Twіst (Поворот) на вкладке General (Общие) определяют соответствующие углы вращения, наклона и поворота (в градусах) и тем самым задают направление всех трех осей координат в пространстве.

*Стиль осей* можно изменить с помощью группы переключателей Axes Style (Стиль осей) и задать один из следующих стилей осей координат:

– Perіmeter (Периметр); Corner (Угол); – None (Нет) - оси отсутствуют.

Если установить флажок Show Box (Показать куб), то координатное пространство будет изображено в виде куба.

*Масштабирование графика* - можно задать числовое значение масштаба в поле Zoom (Масштаб) вкладки General (Общие).

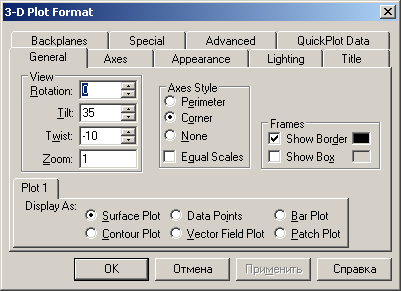


Рисунок 5 – Вкладка General (Display as) для изменения типа графика

Форматирование осей выполняется с использованием вкладки Axes (Оси) (рис.6). Вкладка Axes (Оси) содержит три вложенных вкладки, в которых задаются параметры для каждой из трех координатных осей. В частности, можно включить или отключить отображение линий сетки, нумерацию и задать диапазон по каждой из осей.

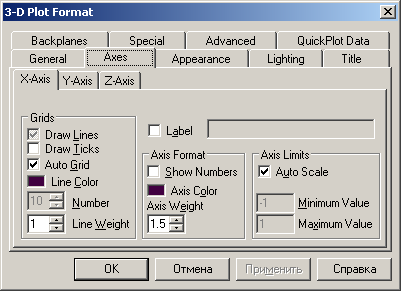


Рисунок 6 – Вкладка Axes(Оси) форматирования осей

С помощью еще одной вкладки — Backplanes(Плоскости заднего плана) (рис. 7) задается отображение проекций координатной сетки на три спрятанные плоскости трехмерного графика.

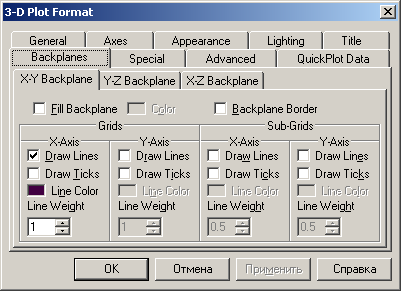


Рисунок 7 – Вкладка Axes(Оси) форматирования осей

С помощью вкладки Appearance (Оформление) (рис. 8) можно изменить стиль задания заливки линий для контурного и поверхностного графиков. При выборе переключателя Fіll Surface (Заливка поверхности) из группы Fіll Optіons (Опции заливки) можно получить доступ к опциям цвета (в группе Color Optіons). Если выбрать переключатель Solіd Color (Один цвет), то получится однотонная заливка поверхности. Если установить переключатель Colormap (Цветовая схема), то поверхность или контурный график будут залиты разными цветами и оттенками, причем выбрать цветовую схему можно на вкладке Advanced (Дополнительно) (рис. 9).

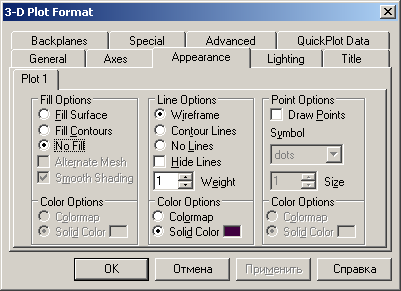


Рисунок 8 – Вкладка Appearance (Оформление) стиля задания заливки

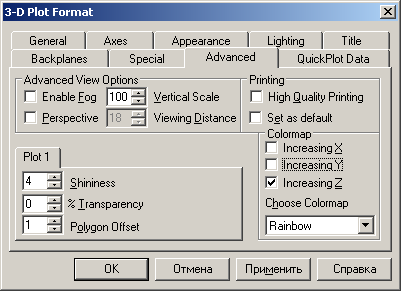


Рисунок 9 – Вкладка Advanced (Дополнительно) для задания цвета в

спецэффектов

Заголовок графика можно изменить с помощью вкладки Title (Заголовок) (рис. 10).

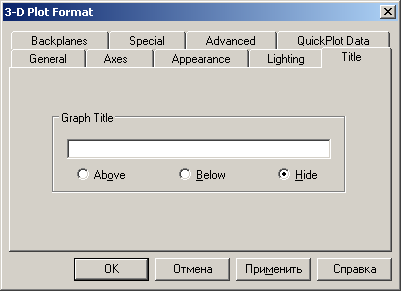


Рисунок 10 – Вкладка TITLE для изменения заголовка графика

**3.4. Способ построения трехмерного графика с помощью матрицы значений**

Существует еще один способ построения трехмерного графика с помощью матрицы значений, которая представляет собой таблицу из трех колонок: в первой будут расположены координаты точек по оси *X*, во второй -по оси *Y*, в третьей - по оси *Z.* В Mathсad существует специальная функция *маtrіх(m,n,f)* (матрица). Функция формирует матрицу, элементы которой равны значениям функции *f(x,y),* исходя из того условия, что *x=i*, *y=j* (т.е. переменные определяются равными соответствующим матричным индексам данного элемента). Количество строк создаваемой матрицы определяется в первом маркере имени функции (параметр *m)*, количество колонок - во втором (параметр *n*). Аналогично двумерному случаю, задать поверхность можно, используя оператор ранжированной переменной по готовым матрицам.

**4****. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ**

С помощью встроенных функций MathCad матрицы можно объединять, выделять в них подмассивы, определять размеры массивов, максимальные, минимальные значения, нахождение собственных чисел и векторов. Для матриц определенны следующие операции: добавление, произведение, обращение, транспонирование, и т.п.

Создать матрицу можно следующим образом:

записать оператор присваивания, для введения правой части использовать команду Іnsert/Matrіx или на панели инструментов Matrіx. В окне, которое раскроется, задать число строк и столбцов матрицы. Вектор является матрицей с одним столбцом. Ввести значение элементов матрицы в соответствующие места. Дальше можно выполнять все необходимые операции с матрицами.

Для работы с элементами матрицы используются индексы элементов. Нумерация строк и столбцов матрицы начинается из нуля. Индекс элемента определяется на панели инструментов Matrіx кнопкой Subscrіpt (рис.1,в), например Mn,k. Два индекса, которые определяют элемент матрицы, отделяются запятой. Номер столбца матрицы отображается как верхний индекс, который заключен в угловые скобки, для чего используется кнопка Column на панели инструментов Matrіx, например, М<1> . Для проведения операций с матрицами используется меню Symbolіc и команда Matrіx (рис. 12).

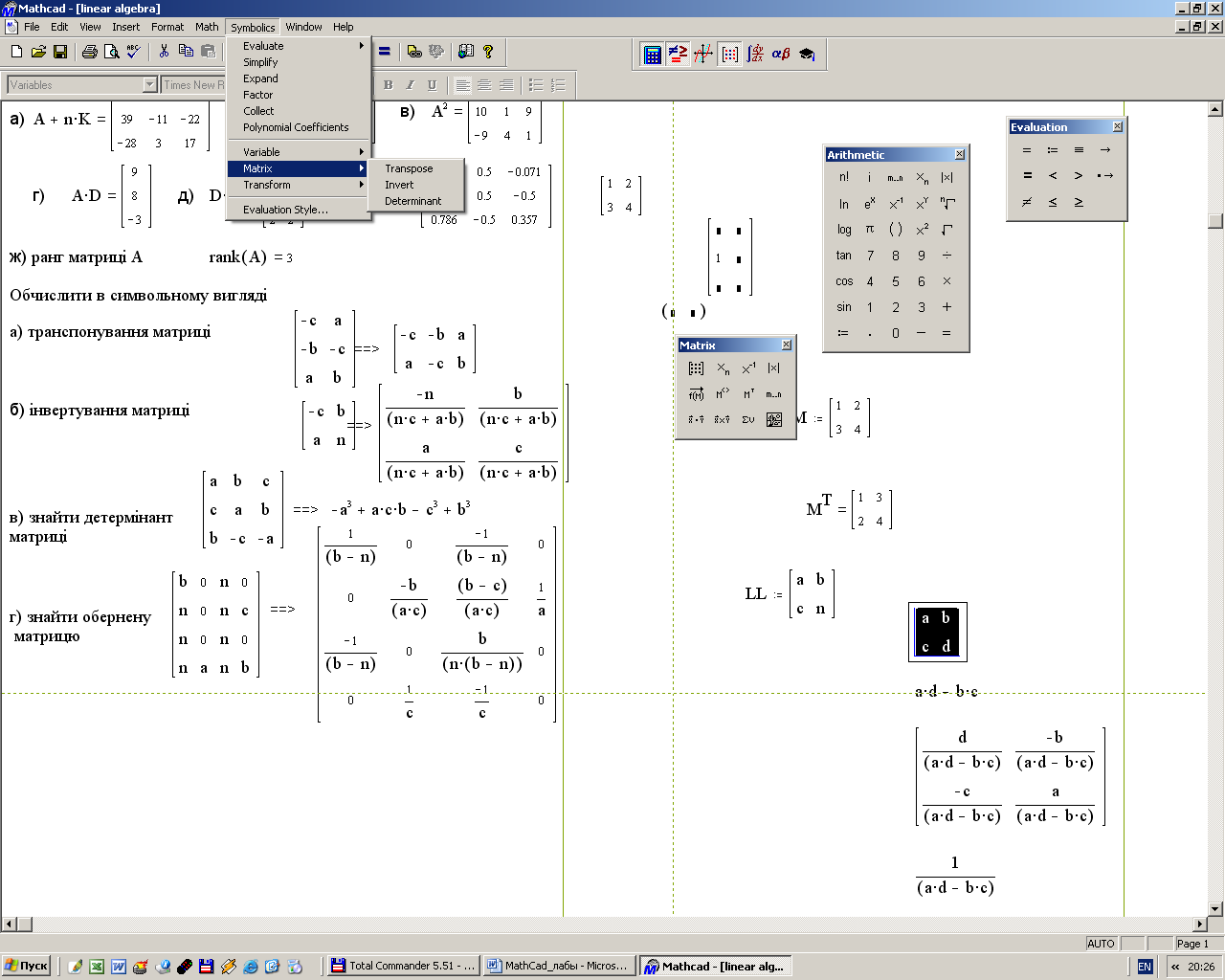


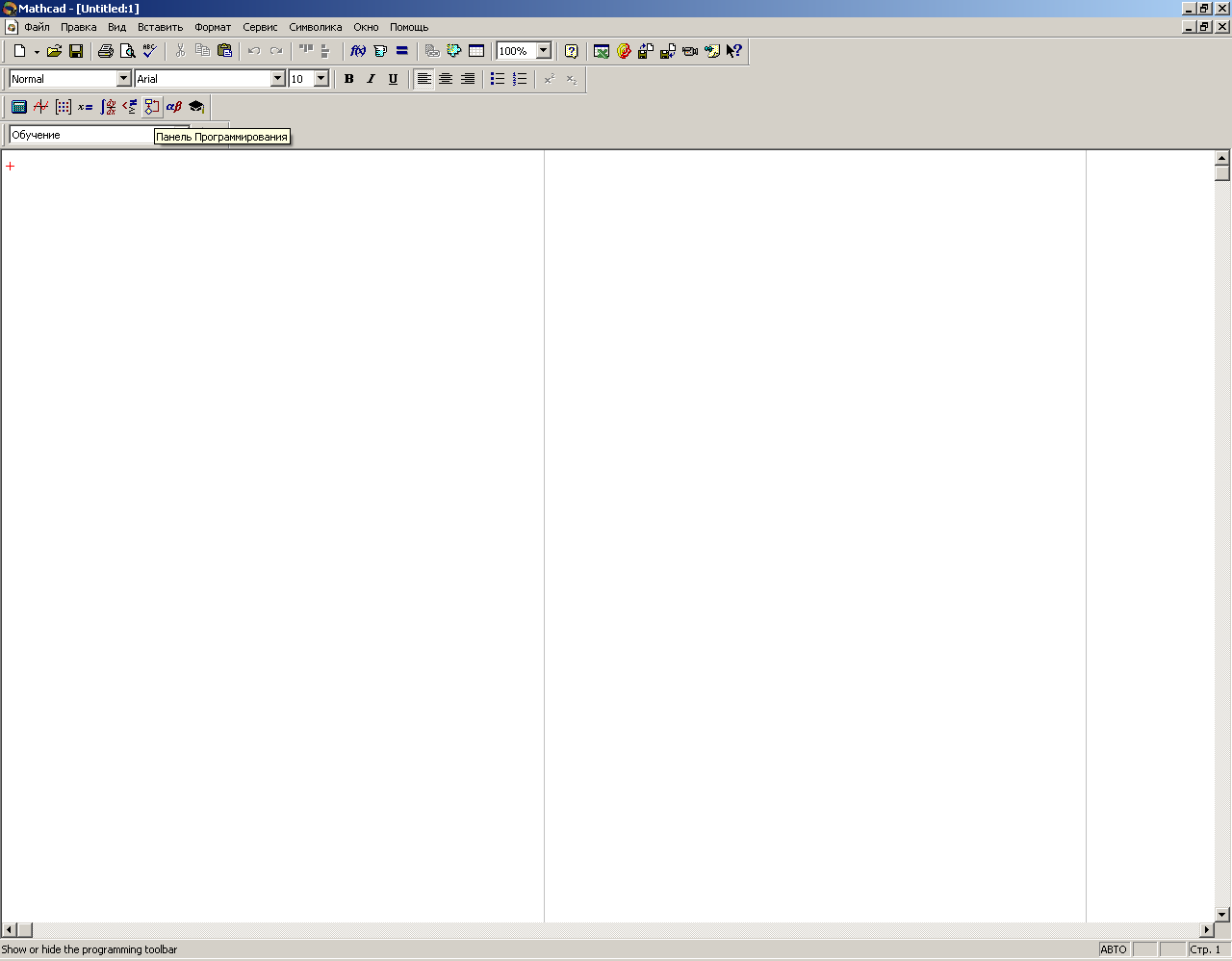
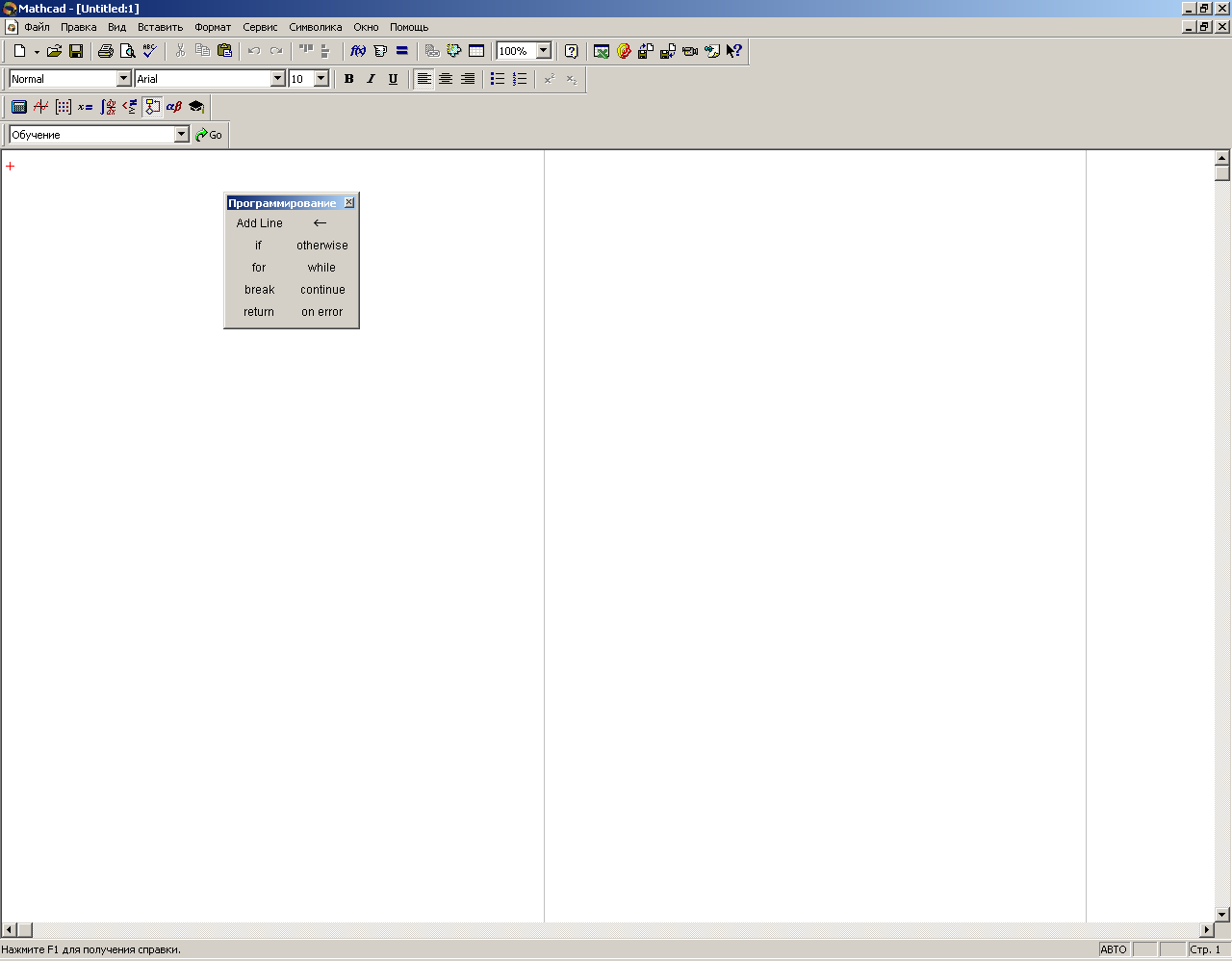
Рисунок 12 – Меню Symbolic для работы с матрицами в символьном

виде.

**5. Программирование в MathCad**

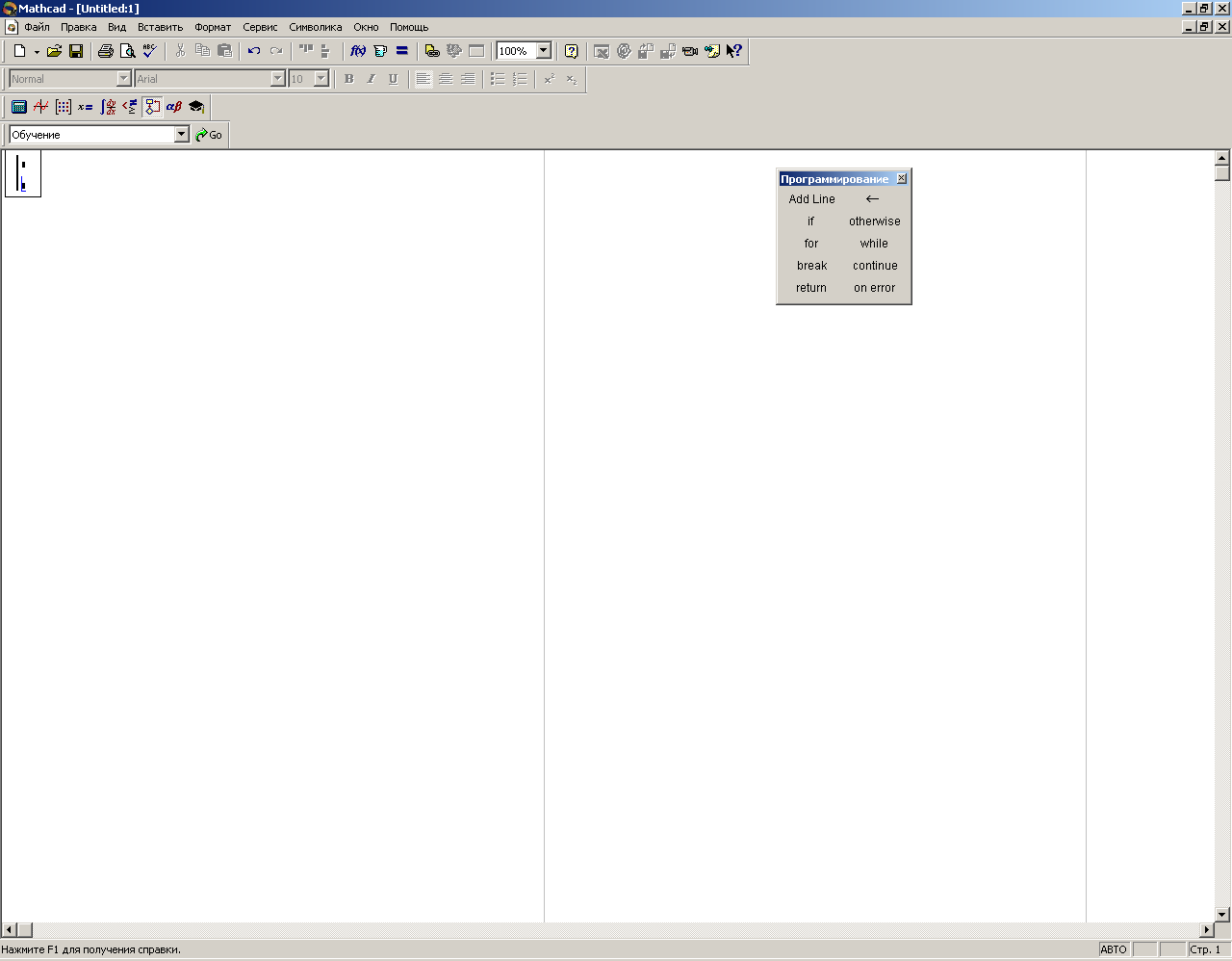
Для написания программ в среде MathCad [4,6] существует специальная панель Programmіng (Программирование) (рис.16, а), она относится к панели Math (Математические) (рис.16, б).

Язык программирования MathCad имеет предельно малое количество операторов (рис. 16, а). Чтобы написать программу, прежде всего для нее должен быть создан блок. Выглядит он как черная вертикальная линия с маркерами, в которые записывают те или иные выражения алгоритма.



а) б)

Рисунок 16–Панель программирования

Чтобы построить единичный элемент программного блока, используется кнопка команды Add Line (Добавить линию) панели Programming (Программирование). При этом в области курсора появится следующий объект: , в который можно занести две строки программы. Для создания большего числа строк программы необходимо последовательно нажимать несколько раз соответствующую кнопку на панели Programming. Программный блок можно создать и внутри уже заданного блока.

Для присвоения значений переменным и функциям в MathCad используется специальный оператор: **←** (Local Defіnіtіon - Локальное присваивание), расположенный на панели Programmіng (Программирование). Использовать оператор обычного присваивания в программах нельзя. Локальные переменные и функции имеют приоритет над глобальными в рамках родной программы. Несколько переменных можно объявлять в одной строке через запятую. Практически любая программа создается с использованием специальных управляющих операторов, таких как оператор цикла **for** или оператора условия **іf**.

Чтобы задать нужный оператор, используются соответствующие кнопки панели Programmіng (Программирование). Просто набрать оператор из клавиатуры нельзя - он будет воспринят системой MathCad как неизвестная функция. Такие операторы как: **іf, for, whіle,** активируют код, расположенный в левом верхнем маркере, в том случае, если выполняется условие в правом. Для задачи условия используются также операторы панели Boolean (Логические). Можно задать и комплекс условий.

С помощью оператора простого цикла **for** можно организовать выполнение операции или проверку условия для ряда конкретных значений переменной. Оператор **for** имеет три маркера: в двух верхних маркерах, соединенных символом принадлежности, задается имя переменной, по которой организуется цикл, и ряд принятых ею значений. В нижнем маркере определяется операция или комплекс операций, которые должны быть выполнены для каждого значения переменной.

С помощью второго оператора цикла **whіle** (Пока) можно организовать цикл, который будет работать до тех пор, пока некоторое условие будет выполняться. Оператор **whіle** имеет два маркера, в которые вводятся соответственно условия работы цикла и выражение для операций, которые будут выполняться на каждом шаге цикла **whіle**. Количество шагов выполнения цикла не нужно определять явным образом.

Если в некоторых ситуациях при работе программы необходимо прервать работу цикла, для этого надо использовать оператор **break** (Прервать). Этот оператор почти всегда работает с оператором **іf** (Если) или **on error** (Перехват ошибок).

Программный оператор условия **іf** (Если) используется практически во всех создаваемых алгоритмах. Условный оператор **іf** имеет два маркера: **٠іf۰**. В правый маркер вводится условие, в левый - операция, которая выполняется в случае, если условие выполняется (если же оно не выполняется, то программа, пропускает данный фрагмент). В маркер оператора может быть внесено несколько условий.

Если алгоритм имеет несколько условий, при этом выполнение одного из них может привести к невыполнению или ошибке в других операторах условий, то можно использовать специальный оператор **contіnue** (Продолжить). Его применение аналогично применению оператору **break** (Прервать).

Оператор **otherwіse** (Иначе) предназначен для определения действия, которое должно быть выполнено, если условие оператора **іf** (Если) окажется ошибочным. Одновременно может быть использовано несколько условных операторов **іf** (Если). Оператор **otherwіse** (Иначе) в таком случае будет задействован, если не выполнятся условия всех операторов **іf** (Если).

С помощью оператора **return** (Возвратить) можно прервать работу программы и возвратить некоторое значение. Этот оператор используется при ошибочной ситуации в программе.

В MathCad существует возможность использовать специальный оператор **on error** (Перехват ошибок). Он дает возможность в программах избегать ошибок и обходить их. Этот оператор по синтаксису полностью отвечает оператору **іf**.

**Лабораторная работа №1.**

**Теория погрешностей**

**Цель**: выработать навыки работы с приближенными числами, применения формул погрешностей элементарных функций и арифметических действий; научиться работать в среде MathCAD в режиме калькулятора.

**Задание**: выполнить предлагаемые задачи на правила действий с приближенными числами.

1. ***Источники и классификация погрешностей***

Источниками возникновения погрешности численного решения задачи являются следующие факторы:

- неточность математического описания, в частности, неточность задания начальных данных.

- неточность численного метода решения задачи. Данная причина возникает, например, когда решение математической задачи требует неограниченного или неприемлемо большого числа арифметических операций, что приводит к необходимости ограничения их числа, т.е. использования приближенного решения.

- конечная точность машинной арифметики.

*Виды погрешностей*

Все погрешности можно разделить на три вида: неустранимая погрешность; погрешность метода; вычислительная погрешность.

Результирующая погрешность определяется как сумма величин всех перечисленных погрешностей.

*Неустранимая погрешность* состоит из двух частей:

- погрешность, обусловленная неточностью задания числовых данных, входящих в математическое описание задачи;

- погрешность, являющаяся следствием несоответствия математического описания задачи реальной действительности (погрешность математической модели).

Для вычислителя погрешность задачи следует считать неустранимой, хотя постановщик задачи иногда может ее изменить.

*Погрешность метода* связана со способом решения поставленной математической задачи. Она появляется в результате замены исходной математической модели другой и/или конечной последовательностью других более простых (например, линейных) моделей. При создании численных методов закладывается возможность отслеживания таких погрешностей и доведения их до сколь угодно малого уровня. Отсюда отношение к погрешности метода как устранимой (или условной).

*Вычислительная погрешность* (погрешность округлений) обусловлена необходимостью выполнять арифметические операции над числами, усеченными до количества разрядов, зависящего от применения техники.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий описанные виды погрешностей. Рассмотрим задачу описания движения маятника, в которой требуется предсказать угол отклонения маятника от вертикали , начинающего движение в момент времени .









Движение маятника может быть описано дифференциальным уравнением второго порядка:

 (1)

где  - длина маятника

 - ускорение свободного падения

 - коэффициент трения.

Причины возникновения погрешностей в данной задаче.

- реальная сила трения зависит от скорости движения маятника по нелинейному закону.

- значения величин , , , , ,  известны с некоторыми погрешностями.

- для решения уравнения (1), не имеющего аналитического решения, приходится использовать численный метод, вследствие чего возникает погрешность метода.

- вычислительная погрешность возникает вследствие конечной точности представления чисел в компьютере.

1. **Абсолютная и относительная погрешности.**

**Формы записи данных**

*Определение .* Если *а* – точное значение некоторой величины и *а\** – известное приближение к нему, то абсолютной погрешностью приближенного значения *а\** называют некоторую величину , про которую известно, что

 (2)

*Определение .* Относительной погрешностью приближенного значения называют некоторую величину , про которую известно, что

 (3)

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

*Определение.* Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Пример 1*. а\*=0,03045* *а\*=0,03045000*

*Определение.* Значащую цифру называют верной, если модуль погрешности числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Пример 1*. а\*=0,03045*  

*а\*=0,030450000* 

*Определение.*  Число записано со всеми верными цифрами, если в его записи представлены только верные значащие цифры.

Иногда употребляется термин *число верных цифр после запятой:* подсчитывается число верных цифр после запятой от первой цифры до последней верной цифры.

*Определение.* Цифра числа называется верной в строгом (в узком смысле), если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

*Определение.* Цифра числа называется верной в широком смысле, если абсолютная погрешность этого числа не превышает единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

Довольно часто информация о некоторой величине задается пределами измерений . Принято записывать эти пределы с одинаковым числом знаков после запятой, так как обычно достаточно грубого представления о погрешности. В записи чисел  и  обычно берут столько значащих цифр, сколько нужно для того, чтобы разность  содержала одну-две значащие цифры.

Информацию о том, что *а\** является приближенным значением числа *а* с абсолютной погрешностью , принято записывать в виде:

 (4)

Числа *а\**, , как правило, записывают с одинаковым количеством знаков после запятой.

Пример 3.



Информацию о том, что *а\** является приближенным значением числа *а* с относительной погрешностью  записывают в виде:



Пример 4*. *. Данная запись числа эквивалентна записи чисел из примера 3.

1. **Вычислительная погрешность**

Далее для краткости будем обозначать абсолютную погрешность числа *х* как , относительную погрешность - .

1. Погрешность суммирования чисел , .

Абсолютная погрешность:

.

Относительная погрешность:



1. Погрешность вычитания чисел , .

Абсолютная погрешность:

.

Относительная погрешность:



1. Погрешность умножения чисел , .

Абсолютная погрешность:

.

Относительная погрешность:



1. Погрешность деления чисел , .

Абсолютная погрешность:



Относительная погрешность:

.

1. Погрешность функции, зависящей от одной переменной.

Абсолютная погрешность:



Относительная погрешность:



Аналогично получают формулы для оценки абсолютной и относительной погрешности для функций, зависящих от *n* переменных.

Задание 1: Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры:  
а) в строгом смысле б) в широком смысле

IMG0006

IMG0009

IMG0007

IMG0008

IMG0012

IMG0020

IMG0021

IMG0014

IMG0015

Ответ: абсолютная погрешность для числа х:  
относительная погрешность числа х

IMG0074

IMG0072

абсолютная погрешность для числа y:  
относительная погрешность числа y

IMG0075IMG0076

Задание 2. Число х, все цифры которого верны в строгом смысле, округлить до трех значащих цифр. Для полученного результата х1 вычислить границы абсолютной и относительной погрешностей. В записи числа х1 указать количество верных цифр по абсолютной и относительной погрешности.

IMG0044

IMG0045

IMG0046

IMG0047

IMG0048

IMG0049

IMG0069

Это значит, что в числе 1.143 три цифры до тысячных (1,1,4,3) верны в строгом смысле по абсолютной погрешности.

IMG0050

IMG0051

т.к. первая значащая цифра в относительной погрешности 3<5, то сравниваем относительную погрешность с числом

IMG0063

Это значит, что в числе 1.143 три цифры (1,1,4) верны в строгом смысле по относительной погрешности.

Задание 3. Вычислить значение величины z с помощью ЭВМ при заданных значениях a и b с систематическим учетом абсолютных погрешностей после каждой операции, если цифры верны в строгом смысле.

IMG0081

IMG0082

IMG0083

Для получения значения величины z необходимо выполнить 6 действий. Будем вычислять абсолютную погрешность после каждого действия с целью определения количества верных цифр в промежуточных результатах.  
Т.к. цифры верны в строгом смысле, то абсолютные значения данных чисел a, b равны соответственно:

IMG0094

IMG0095

IMG0096

IMG0097

1) IMG0088

IMG0089

IMG0090

IMG0231

IMG0232

Значит, в числе а1 верны цифры до сотых (т.е.3, 5, 1), а остальные - сомнительные. т.е.

IMG0112

(сохраняем одну сомнительную цифру)

2) IMG0124

IMG0125

IMG0126

IMG0233

IMG0234

Значит, в числе b1 верны цифры до десятых (т.е.3, 7), а остальные - сомнительные. т.е.

IMG0130

(сохраняем одну сомнительную цифру)

3) IMG0151

IMG0152

IMG0153

IMG0155

IMG0157

Значит, в числе chicl верны цифры до десятых (т.е.7, 2), а остальные - сомнительные. т.е.

IMG0159

(сохраняем одну сомнительную цифру)

4) IMG0170

IMG0171

IMG0164

IMG0165

IMG0166

Значит, в числе а2 верны цифры до тысячных (т.е.2, 5, 1, 2), а остальные - сомнительные. т.е.

IMG0168

(сохраняем одну сомнительную цифру)

5) IMG0182

IMG0183

IMG0184

IMG0235

IMG0236

Значит, в числе chicl верны цифры до единиц (т.е.1, 6), а остальные - сомнительные. т.е.

IMG0188

(сохраняем одну сомнительную цифру)

6)

IMG0210

IMG0211

IMG0204

IMG0215

IMG0214

Значит, в числе z верны цифры до сотых (т.е.0, 4, 3), а остальные - сомнительные. т.е.

IMG0207

(сохраняем одну сомнительную цифру)

IMG0219

IMG0220

т.к. первая значащая цифра в относительной погрешности 4<5, то сравниваем относительную погрешность с числом

IMG0229

Это значит, что в числе 0.4339285714 две цифры (4,3) верны в строгом смысле по относительной погрешности.

Ответ: Величина z=0,434. Две цифры 4, 3 верны по абсолютной погрешности, две цифры верны по относительной погрешности.

*Задания для самостоятельной работы*

*Задача 1.* Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры (Табл. 1):

а) в строгом смысле, б) в широком смысле.

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. 1 | а)11,445 | б) 2,043 | 21 | а) 2,4516 | б) 0,863 |
| 1. 2 | а) 8,345 | б) 0,288 | 22 | а) 5,6432 | б) 0,00858 |
| 1. 3 | а) 0,374 | б) 4,348 | 23 | а) 12,688 | б) 4,636 |
| 1. 4 | а) 41,72 | б) 0,678 | 24 | а) 15,644 | б) 6,125 |
| 1. 5 | а) 18,357 | б) 2,16 | 25 | а) 16,383 | б) 5,734 |
| 1. 6 | а) 14,862 | б) 8,73 | 26 | а) 18,275 | б) 0,00644 |
| 1. 7 | а) 0,3648 | б) 21,7 | 27 | а) 3,75 | б) 6,8343 |
| 1. 8 | а) 0,5746 | б) 236,58 | 28 | а) 26,3 | б) 4,8556 |
| 1. 9 | а) 5,634 | б) 0,0748 | 29 | а) 43,813 | б) 0,645 |
| 10 | а) 20,43 | б) 0,576 | 30 | а) 3,643 | б) 72,385 |
| 11 | а) 12,45 | б) 3,4453 | 31 | а) 3,425 | б) 7,38 |
| 12 | а) 2,3445 | б) 0,745 | 32 | а) 0,573 | б) 3,6761 |
| 13 | а) 0,5746 | б) 42,884 | 33 | а) 0,3825 | б) 24,6 |
| 14 | а) 3,4 | б) 0,078 | 34 | а) 0,856 | б) 23,508 |
| 15 | а) 2,4342 | б) 0,57004 | 35 | а) 5,60234 | б) 0,07 |
| 16 | а) 112,5 | б) 0,04453 | 36 | а) 20,4143 | б) 0,51 |
| 17 | а) 0,576 | б) 2,5008 | 37 | а) 12,0 | б) 53,3 |
| 18 | а) 25,613 | б) 0,0748 | 38 | а) 2,35 | б) 0,74015 |
| 19 | а) 0,4223 | б) 0,57 | 39 | а) 92,451 | б) 103,43 |
| 20 | а) 112,45 | б) 3,4 | 40 | а) 2010,345 | б) 0,44745 |

*Задача 2.* Число х(Табл. 2), все цифры которого верны в строгом смысле, округлить до трех значащих цифр. Для полученного результата *x*1*≈x* вычислить границы абсолютной и относительной погрешностей. В записи числа *x*1 указать количество верных цифр по абсолютной и относительной погрешностям.

Таблица 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | *x* | № | *х* |
| 1. 1 | 3549 | 21 | 23,394 |
| 1. 2 | 32,147 | 22 | 0,003775 |
| 1. 3 | 35,085 | 23 | 718,21 |
| 1. 4 | 7,544 | 24 | 9,73491 |
| 1. 5 | 198,745 | 25 | 11,456 |
| 1. 6 | 37,4781 | 26 | 0,1495 |
| 1. 7 | 0,183814 | 27 | 6,2358 |
| 1. 8 | 0,009145 | 28 | 4,4005 |
| 1. 9 | 11,3721 | 29 | 2,3078 |
| 10 | 0,2538 | 30 | 3,2175 |
| 11 | 10,2118 | 31 | 0,0002568 |
| 12 | 4,394 | 32 | 37,8455 |
| 13 | 0,8437 | 33 | 0,09872 |
| 14 | 129,66 | 34 | 3,00971 |
| 15 | 48,847 | 35 | 1,15874 |
| 16 | 9,2038 | 36 | 0,003711 |
| 17 | 2,3143 | 37 | 0,029056 |
| 18 | 0,012147 | 38 | 4,7561 |
| 19 | 0,86129 | 39 | 0,003822 |
| 20 | 0,1385 | 40 | 0,095641 |

*Задача 3.* Вычислить значение величины *z* (Табл. 3) при заданных *a*, *b* и *c* c систематическим учетом абсолютных погрешностей после каждой операции и с помощью метода границ. Найти абсолютную и относительную погрешности *z,* и определить по ним количество верных цифр в z, если цифры *a, b* и *c* верны в строгом смысле:

Таблица 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Задание | Исходные данные | № | Задание | Исходные данные |
| 1. 1 |  | a = 0,317  b = 3,27  c = 4,7561 | 8 |  | a = 0,038  b = 3,9353  c = 5,75 |
| 1. 2 |  | a = 0,0399  b = 4,83  c = 0,0721 | 9 |  | a = 7,345  b = 0,31  c = 0,09871 |
| 1. 3 |  | a = 1,0574  b = 1,40  c = 1,1236 | 10 |  | a = 0,2471  b = 0,0948  c = 4,378 |
| 1. 4 |  | a = 12,72  b = 0,34  c = 0,0290 | 11 |  | a = 1,284  b = 4,009  c = 3,2175 |
| 1. 5 |  | a = 3,49  b = 0,845  c = 0,0037 | 12 |  | a = 18,407  b = 149,12  c = 2,3078 |
| 1. 6 |  | a = 0,0976  b = 2,371  c = 1,15887 | 13 |  | a = 29,49  b = 87,878  c = 4,403 |
| 1. 7 |  | a = 82,3574  b = 34,12  c = 7,00493 | 14 |  | a = 74,079  b = 5,3091  c = 6,234 |

Продолжение таблицы 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Задание | Исходные данные | № | Задание | Исходные данные |
| 1. 15 |  | a = 3,71452  b = 3,03  c = 0,756 | 24 |  | a = 3,4  b = 6,22  c = 0,149 |
| 1. 16 |  | a = 0,11587  b = 4,256  c = 3,00971 | 25 |  | a = 5,387  b = 13,527  c = 0,7565 |
| 17 |  | a = 4,05  b = 6,723  c = 0,03254 | 26 |  | a = 1,75  b = 1,215  c = 0,041 |
| 18 |  | a = 0,7219  b = 135,347  c = 0,013 | 27 |  | a = 3,672  b = 4,63  c = 0,0278 |
| 19 |  | a = 0,113  b = 0,1056  c = 89,4 | 28 |  | a = 13,57  b = 3,7  c = 4,226 |
| 20 |  | a = 1,247  b = 0,346  c = 0,051 | 29 |  | a = 0,317  b = 13,57  c = 0,751 |
| 21 |  | a = 11,7  b = 0,0937  c = 5,081 | 30 |  | a = 0,317  b = 33,827  c = 14,85 |
| 22 |  | a = 18,035  b = 3,7251  c = 0,071 | 31 |  | a = 5,52  b = 3,27  c = 14,123 |
| 23 |  | a = 5,7568  b = 21,7  c = 2,65 | 32 |  | a = 9,542  b = 3,128  c = 0,17 |

**Отчет о выполненной работе должен содержать:**

1. Тему и цель работы

2. Индивидуальное задание согласно варианту

3. Решение предложенных задач

**Вопросы к защите лабораторной работы**

1.Что такое абсолютная и относительная погрешности?

2.Как классифицируются виды ошибок?

3.Что значит цифра, верная в строгом, широком смыслах?

**Лабораторная работа №2,3**

**Метод наименьших квадратов**

**Цель работы**: научиться находить аналитическое выражение таблично заданной функции с помощью метода наименьших квадратов.

**Задание**: найти наилучшее приближение таблично заданной функции.

Пусть на основании эксперимента требуется установить функциональную зависимость величины *у* от величины *х*:

*у=ϕ(х)* (1)

Пусть в результате эксперимента получено *п* значений функции *у* при соответствующих значениях аргумента. Результаты записаны в таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| х |  |  | ……… |  |
|  |  |  | ……… |  |

Вид функции *ϕ*(*х*) устанавливается или из теоретических соображений, или на основании расположения на координатной плоскости точек, соответствующим экспериментальным значениям. Её выбирают обычно из несложных элементарных функций так, чтобы она как можно лучше описывала экспериментальные данные:

|  |  |
| --- | --- |
| Вид аппроксимирующей функции | Вид аппроксимирующей функции |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

При выбранном виде функции *у=ϕ*(*х,а,b,c,…*) остается подобрать входящие в нее параметры для наилучшего в некотором смысле приближения функцией рассматриваемого процесса. Эта задача называется *сглаживанием (аппроксимацией)* экспериментальной зависимости и часто решается *методом наименьших квадратов*. Сглаживающую кривую называют *аппроксимирующей*.

Рассмотрим сумму квадратов разностей значений *уi,* даваемых экспериментом, и функции *ϕ*(*х,а,b,c,…*) в соответствующих точках:

*S*(*a,b,c,…*)= (2)

Подбираем параметры *a,b,c,…*так, чтобы эта сумма имела наименьшее значение:

*S*(*a,b,c,…*)=→ *min* (3)

Задача свелась к нахождению значений параметров *a,b,c,…*, при которых функция *S*(*a,b,c,…*) имеет минимум. На основании необходимого признака экстремума функции нескольких переменных

(4)

Для каждой конкретной функции равенства (4) в развернутом виде представляют собой систему уравнений для нахождения неизвестных параметров. Например, для случая, когда в качестве аппроксимирующей функции выбрана линейная *у=ах+b*, система уравнений имеет вид:

,

.

Такую систему можно решать любыми способами, том числе и с помощью пакета *Mathcad*.

1. Линейная функция.

Известны значения функции в некоторых точках, представленных в таблице

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 1.71 | 2.42 | 3.13 | 3.84 | 4.55 | 5.26 | 5.97 |
| у | 12.49 | 4.76 | 2.55 | 1.60 | 1.11 | 0.82 | 0.63 | 0.5 |

Найти приближенное выражение функции в виде линейной функции

.

Решение.

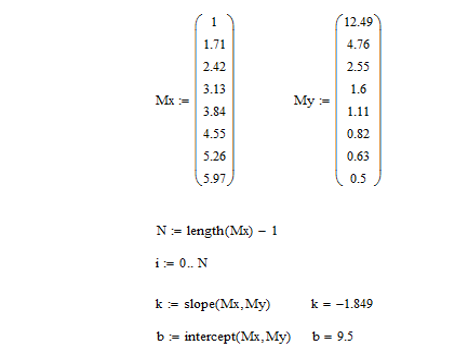
1). Вводим исходные данные задачи в виде массивов и .

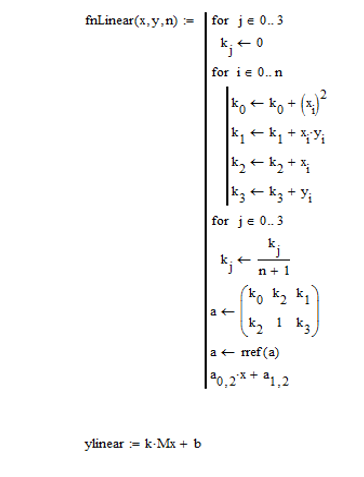
2). Сортируем данные, если они даны не в порядке возрастания. Значения запишем соответственно отсортированным значениям , используя функцию (в массив М внести значения и ).

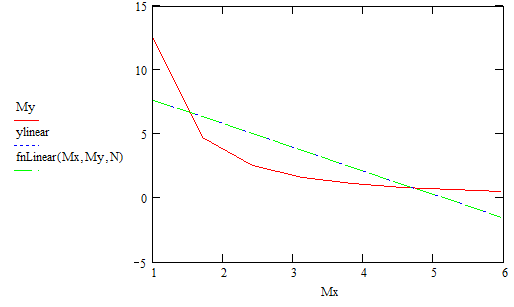
3). Вводим переменные, необходимые для дальнейших вычислений:

4). Находим коэффициенты линейной функции, используя встроенные возможности *Mathcad*:

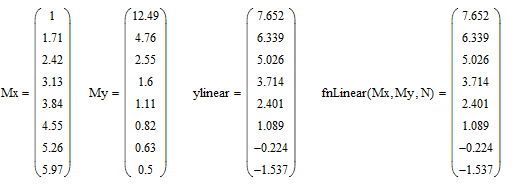
Функция позволяет найти угловой коэффициент линии регрессии (наклон линии регрессии), а – смещение по оси ординат линии регрессии (свободный параметр). Их можно найти также, реализовав метод наименьших квадратов, решая для этого систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными







В результате получим: значения и , найденные по приближающей линейной функции и полученные решением системы двух уравнений с двумя неизвестными

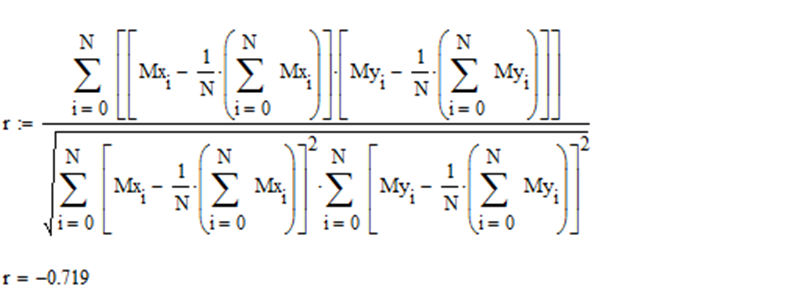


Таким образом, функция имеет вид .

5). Проверим, как точно найден характер исходной функции. Для этого найдем отклонение таблично заданных значений от точек полученной линейной функции

6). Правильность выбора приближающей функции можно определить и по коэффициенту корреляции, используя функцию :

Или записав формулу вычисления коэффициента корреляции:



Полученное значение коэффициента показывает, что зависимость у нас обратная (знак «минус») и связь достаточно тесная (число достаточно близко к 1).

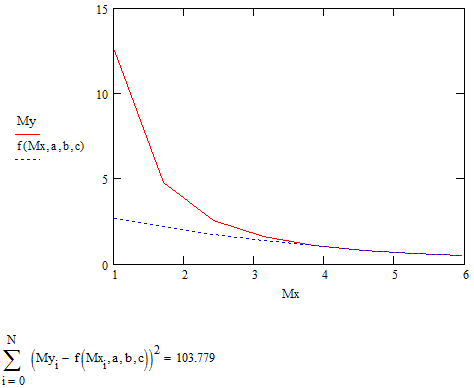
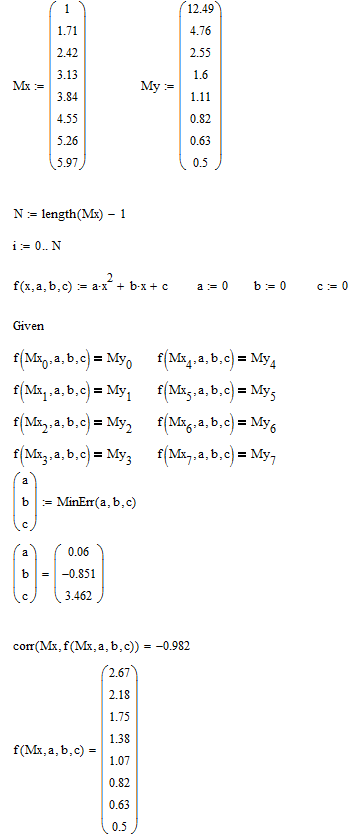
1. Квадратичная функция.

Известны значения функции в некоторых точках, представленных в таблице

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 1.71 | 2.42 | 3.13 | 3.84 | 4.55 | 5.26 | 5.97 |
| у | 12.49 | 4.76 | 2.55 | 1.60 | 1.11 | 0.82 | 0.63 | 0.5 |

Найти приближенное выражение функции в виде многочлена второй степени .

Решение.

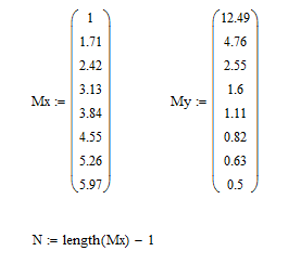


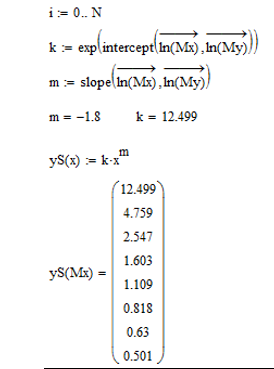
1. Степенная функция. Известны значения функции в некоторых точках, представленных в таблице

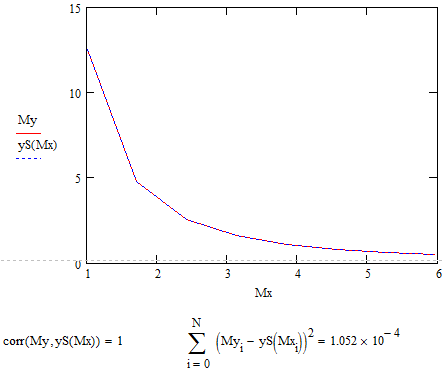
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 1.71 | 2.42 | 3.13 | 3.84 | 4.55 | 5.26 | 5.97 |
| у | 12.49 | 4.76 | 2.55 | 1.60 | 1.11 | 0.82 | 0.63 | 0.5 |

Найти приближенное выражение функции в виде степенной функции .

Решение.



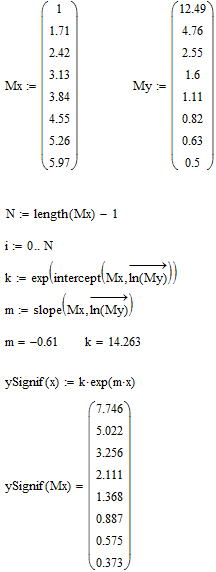


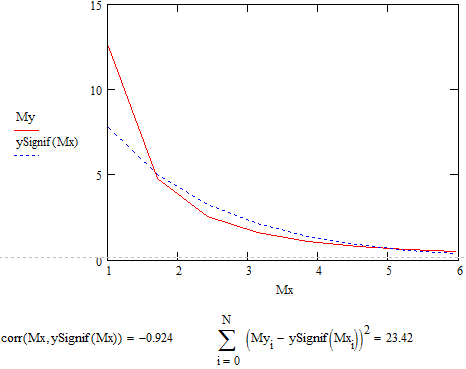


1. Показательная функция. Известны значения функции в некоторых точках, представленных в таблице

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 1.71 | 2.42 | 3.13 | 3.84 | 4.55 | 5.26 | 5.97 |
| у | 12.49 | 4.76 | 2.55 | 1.60 | 1.11 | 0.82 | 0.63 | 0.5 |

Найти приближенное выражение функции в виде показательной функции .



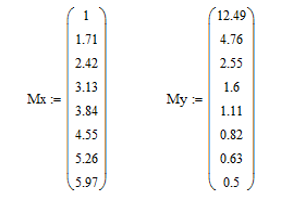


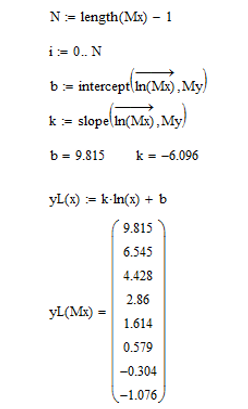
1. Логарифмическая функция. Известны значения функции в некоторых точках, представленных в таблице

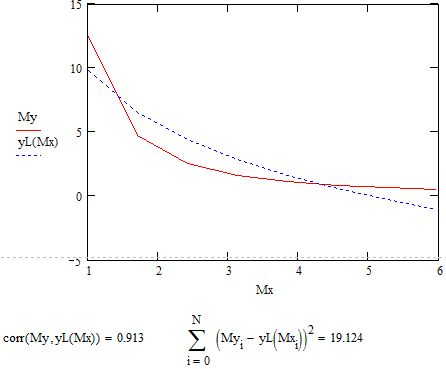
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 1.71 | 2.42 | 3.13 | 3.84 | 4.55 | 5.26 | 5.97 |
| у | 12.49 | 4.76 | 2.55 | 1.60 | 1.11 | 0.82 | 0.63 | 0.5 |

Найти приближенное выражение функции в виде логарифмической функции .

Решение.





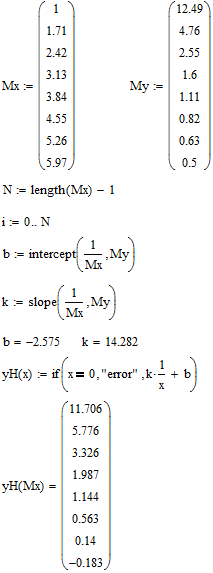


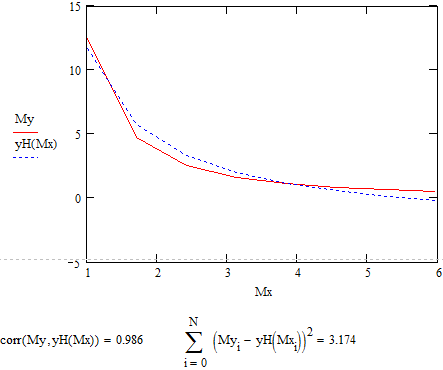
1. Гиперболическая функция. Известны значения функции в некоторых точках, представленных в таблице

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 1.71 | 2.42 | 3.13 | 3.84 | 4.55 | 5.26 | 5.97 |
| у | 12.49 | 4.76 | 2.55 | 1.60 | 1.11 | 0.82 | 0.63 | 0.5 |

Найти приближенное выражение функции в виде гиперболы

Решение.





**Задача.** Для исходных данных, представленных в таблице, выяснить, какая из функций (линейная, квадратическая, степенная, показательная, логарифмическая, гиперболическая) наиболее точно их описывает

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Исходные данные для задачи аппроксимации | | | | | | | | |
| 1 | х | 1,20 | 1,57 | 1,94 | 2,31 | 2,68 | 3,05 | 3,42 | 3,79 |
| у | 2,59 | 2,06 | 1,58 | 1,25 | 0,91 | 0,66 | 0,38 | 0,21 |
| 2 | х | 1,73 | 2,56 | 3,39 | 4,22 | 5,05 | 5,89 | 6,70 | 7,53 |
| у | 0,63 | 1,11 | 1,42 | 1,94 | 2,30 | 2,89 | 3,29 | 3,87 |
| 3 | х | -4,38 | -3,84 | -3,23 | -2,76 | -2,22 | -1,67 | -1,13 | -0,60 |
| у | 2,25 | 2,83 | 3,44 | 4,31 | 5,29 | 6,55 | 8,01 | 10,04 |
| 4 | х | 1,00 | 1,64 | 2,28 | 2,91 | 3,56 | 4,19 | 4,84 | 5,48 |
| у | 0,28 | 0,19 | 0,15 | 0,11 | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,06 |
| 5 | х | 5,84 | 3,82 | 6,19 | 9,22 | 7,87 | 6,29 | 4,43 | 8,91 |
| у | 79,31 | 57,43 | 60,66 | 92,55 | 90,12 | 71,30 | 70,50 | 91,25 |
| 6 | х | 2,91 | 2,94 | 6,35 | 6,58 | 3,80 | 6,43 | 0,57 | 5,96 |
| у | 82,16 | 61,02 | 44,56 | 82,52 | 99,17 | 70,24 | 63,23 | 66,48 |
| 7 | х | 5,46 | 2,73 | 6,49 | 4,26 | 2,39 | 6,46 | 0,86 | 2,05 |
| у | 65,72 | 58,05 | 60,05 | 55,79 | 50,83 | 47,69 | 44,49 | 59,74 |
| 8 | х | 1,28 | 1,76 | 2,24 | 2,72 | 3,20 | 3,68 | 4,16 | 4,64 |
| у | 2,10 | 2,62 | 3,21 | 3,96 | 4,98 | 6,06 | 7,47 | 9,25 |
| 9 | х | -4,84 | -4,30 | -3,76 | -3,22 | -2,68 | -2,14 | -1,60 | -1,06 |
| у | -0,09 | -0,11 | -0,13 | -0,16 | -0,19 | -0,26 | -0,39 | -0,81 |
| 10 | х | 3,54 | 4,29 | 4,78 | 3,99 | 1,13 | 6,29 | 1,89 | 3,27 |
| у | 22,81 | 28,42 | 24,95 | 26,96 | 8,78 | 33,55 | 15,77 | 22,80 |
| 11 | х | 4,08 | 4,42 | 2,52 | -0,08 | 2,14 | 3,36 | 7,35 | 5,00 |
| у | 18,31 | 21,85 | 16,93 | -8,23 | 10,90 | 17,18 | 36,45 | 24,11 |
| 12 | х | 1,16 | 1,88 | 2,60 | -3,32 | 4,04 | 4,76 | 5,48 | 6,20 |
| у | 0,18 | 0,26 | 0,32 | 0,36 | 0,40 | 0,43 | 0,95 | 0,85 |
| 13 | х | 1,00 | 1,71 | 2,42 | -3,13 | 3,84 | 4,55 | 5,26 | 5,97 |
| у | 12,49 | 4,76 | 2,55 | 1,60 | 1,11 | 0,82 | 0,63 | 0,50 |
| 14 | х | -0,64 | -0,36 | -0,08 | 0,20 | 0,48 | 0,76 | 1,04 | 1,32 |
| у | 29,51 | 18,86 | 12,05 | 7,70 | 4,92 | 3,14 | 20,1 | 1,28 |
| 15 | х | -2,45 | -1,94 | -1,43 | -0,92 | -0,41 | 0,10 | 0,61 | 1,12 |
| у | 0,87 | 1,19 | 1,68 | 2,23 | 3,04 | 4,15 | 5,66 | 7,72 |
| 16 | х | 1,54 | 1,91 | 2,28 | -2,65 | 3,02 | 3,39 | 3,76 | 4,13 |
| у | -2,52 | -3,08 | -3,54 | -3,93 | -4,27 | -4,57 | -4,84 | -5,09 |
| 17 | х | 1,20 | 2,00 | 2,80 | -3,60 | 4,40 | 5,20 | 6,00 | 6,80 |
| у | -10,85 | -6,15 | -4,14 | -3,02 | -2,30 | -1,81 | -1,45 | -1,17 |
| 18 | х | -1,04 | -0,67 | -0,30 | 0,07 | 0,44 | 0,81 | 1,18 | 1,55 |
| у | 10,80 | 8,08 | 5,97 | 4,44 | 3,31 | 2,46 | 1,83 | 1,36 |
| 19 | х | 0,41 | 0,97 | 1,53 | -2,09 | 2,65 | 3,21 | 3,77 | 4,33 |
| у | 0,45 | 1,17 | 1,56 | 1,82 | 2,02 | 2,18 | 2,31 | 2,44 |
| 20 | х | 3,80 | 0,25 | 0,48 | 5,78 | 4,91 | 1,56 | 0,91 | 5,73 |
| у | -19,23 | -21,41 | -9,90 | -19,56 | -0,30 | -12,04 | 1,14 | 11,26 |

**Отчет о выполненной работе должен содержать:**

1. Тему и цель работы

2. Индивидуальное задание согласно варианту

3. Решение предложенных задач

**Вопросы к защите лабораторной работы**

1. Для чего применяется метод наименьших квадратов?

2. Объясните сущность метода наименьших квадратов.

3. Что служит показателем точности аппроксимации?

**Лабораторная работа № 4**

**Теория вероятностей**.

**Цель работы:** Изучить возможности MathCAD по работе с задачами теории вероятностей.

**Задание**: решить предложенные задачи

1. **Функции и инструменты MathCAD.**

Прежде чем приступать к решению задач теории вероятностей в MathCAD, познакомимся с инструментами, которые предоставляет пакет для их решения.

Напомним, что дискретная случайная величина , принимающая значения  с вероятностями , может быть задана распределением – таблицей вида:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  | … |
|  |  |  | … |  | … |

В среде MathCAD такие таблицы удобно хранить в виде матриц размерности . Функция распределения случайной величины, имеющей приведённое выше распределение, имеет вид:

 .

Задание 1. Найти и построить функцию распределения дискретной случайной величины, заданной законом распределения:

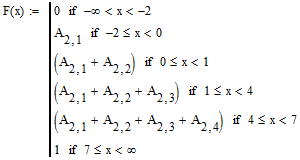
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 | 7 | 4 | -2 |
|  | 0,1 | 0,5 | 0,1 | 0,1 | 0,2 |

Решение.

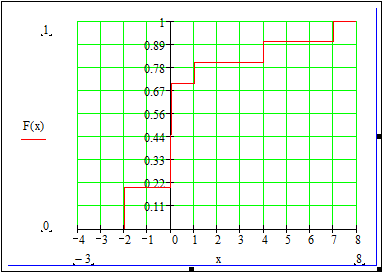
1. Зададим закон распределения дискретной случайной величины в виде матрицы размерности .

Рисунок 1

2. Зададим функцию распределения дискретной случайной величины .



3. Выведем график полученной функции:



**Замечание 1.** Распределение случайной величины сохранено в матрице А:  – значения случайной величины;  – соответствующие вероятности; . Чтобы нумерация начиналась с единицы, необходимо перед использованием индексированных переменных ввести команду ORIGIN:=1.

**Замечание 2.** Функцию распределения, заданную разными выражениями на разных интервалах изменения аргументов, можно определить следующим образом: разверните панель **Инструменты программирования** щелчком по кнопке Рисунок 4 и панель **Булевых инструментов** Рисунок 5. Они нам понадобятся для определения функции. Введите имя функции  и знак присвоения. На панели **Инструментов программирования** нажмите кнопку Рисунок 6, введите в помеченной позиции нуль, а затем нажмите кнопку Рисунок 7 на той же панели и введите неравенства, определяющие первый интервал изменения аргумента. Затем перейдите ко второй строке и выполните аналогичные операции.

**Замечание 3.** Графики функций распределений построены стандартным для декартовых графиков способом. Следует помнить, что MathCAD не совсем корректно строит графики ступенчатых функций, соединяя отрезками прямых значения функции в точке скачка. Более точный график функции распределения представляет собой отрезки, параллельные оси абсцисс, с «выколотым» правым концом.

Для проведения вычислений со случайными величинами (непрерывными и дискретными) в MathCAD есть богатая библиотека встроенных функций наиболее распространенных стандартных распределений. Каждое распределение представлено в библиотеке тремя функциями – плотностью вероятностей, функцией распределения и функцией, обратной к функции распределения.

Например, для работы с нормальным распределением предназначены функции dnorm(x,,), pnorm(x,,) и qnorm(x,,). Значением функции dnorm(x,,) является значение в точке х плотности вероятностей случайной величины , имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием  и дисперсией ; значение функции pnorm(x,,) – значение функции распределения этой же случайной величины ; значением функции qnorm(x,,) служит решение уравнения , где  – функция распределения, определенная функцией pnorm(x,,), т. е. значением qnorm(x,,) является квантиль уровня  нормально распределенной случайной величины. Имена всех встроенных функций, определяющих плотности вероятностей, начинаются с буквы d, определяющих функции распределения – с буквы р, определяющих квантили – с буквы q.

Ниже приведены список всех распределений, представленных в библиотеке MathCAD, и имена соответствующих функций:

-бета-распределение – dbeta(x,,), pbeta(x,,), qbeta(x,,);

-биномиальное распределение – dbinom(k,n,p), pbinom(k,n,p), qbinom(p,n,r);

-распределение Коши – dcauchy(x,l,s), pcauchy(x,l,s), dcauchy(p,l,s);

--распределение – dchisq(x,d), pchisq(x,d), qchisq(p,d);

-экспоненциальное распределение – dexp(x,r), pexp(x,r), qexp(p,r);

-распределение Фишера (F-распределение) – dF(x,,), pF(x,,),

qF(x,,);

-гамма-распределение – dgamma(x,s), pgamma(x,s), qgamma(p,s);

-геометрическое распределение – dgeom(x,p), pgeom(x,p), qgeom(p,r);

-логнормальное распределение – dlnorm(x,,), plnorm(x,,),

qlnorm(x,,);

-логистическое распределение – dlogis(x,l,s), plogis(x,l,s), qlogis(p,l,s);

-отрицательное биномиальное распределение – dnbinom(k,n,p), pnbinom(k,n,p), qnbinom(p,n,r);

-нормальное распределение – dnorm(x,,), рпогт(x,,), qnorm(x,,);

-распределение Пуассона – dpois(x,), ppois(x,), qpois(x,);

-распределение Стьюдента – dt(x,d), pt(x,d), qt(p,d);

-равномерное распределение – dunif(x,a,b), punif(x,a,b), qunif(p,a,b);

-распределение Вейбулла – dweibull(x,s), pweibull(x,s), qweibull(p,s).

Кроме того, в библиотеке встроенных функций MathCAD, естественно, есть функция Лапласа .

Для вычисления числовых характеристик дискретных и непрерывных случайных величин применяются операторы интегрирования и дифференцирования, вычисления конечных сумм и суммирования рядов, которые вызываются щелчком мыши по кнопке в панели Рисунок 8 и заполнением соответствующих помеченных полей. Примеры использования этих операций при решении задач теории вероятностей приведены в последующих разделах.

1. **Случайные величины. Функции распределения.**

Теория вероятностей изучает математические модели случайных явлений окружающего нас мира. Одно из центральных понятий теории вероятностей – понятие случайной величины. *Случайной величиной* называется числовая функция, заданная на множестве случайных событий. Например, случайной величиной является число очков, выпавших при бросании игральной кости, или рост случайно выбранного из учебной группы студента. В первом случае мы имеем дело с *дискретной* случайной величиной (она принимает значения из дискретного числового множества) ; во втором случае – с *непрерывной* случайной величиной (она принимает значения из непрерывного числового множества – из промежутка числовой прямой [100, 230]). В дальнейшем случайные величины будем обозначать греческими буквами.

Каждая случайная величина полностью определяется своей функцией распределения.

Если  – случайная величина, то функция  называется *функцией распределения* случайной величины . Здесь  – вероятность того, что случайная величина  принимает значение, меньшее x.

Функция распределения любой случайной величины обладает следующими свойствами:

- определена на всей числовой прямой R;

- не убывает;

-, , т. е. , .

- непрерывна слева, т.е. .

Если функция распределения непрерывна, то случайная величина  называется *непрерывной случайной величиной*. Если функция распределения  непрерывно дифференцируема, то более наглядное представление о случайной величине дает *плотность вероятности (распределения) случайной величины *, которая связана с функцией распределения  формулами:

**

*.*

Отсюда, в частности, следует, что для любой случайной величины .

Если  – дискретная случайная величина, принимающая значения  с вероятностями , то таблица вида:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  | … |
|  |  |  | … |  | … |

называется рядом распределения дискретной случайной величины или просто распределением случайной величины.

Вероятность того, что значение случайной величины  попадёт в интервал , вычисляется для непрерывной случайной величины по формуле:

,

а для дискретной случайной величины – по формуле:

.

При решении практических задач с дискретными случайными величинами чаще всего приходится сталкиваться со случайными величинами, распределёнными по биномиальному, геометрическому или пуассоновскому

законам распределения. Рассмотрим их отдельно.

**Биномиальное распределение (схема Бернулли).** Пусть проводится серия из  независимых испытаний, каждое из которых заканчивается либо «успехом», либо «неуспехом». Пусть в каждом испытании (опыте) вероятность успеха , а вероятность неудачи – . С таким испытанием можно связать случайную величину *,* равную числу успехов в серии из испытаний. Эта величина принимает целые значения от 0 до . Ее распределение называется *биномиальным* и определяется формулой Бернулли

.

|  |  |
| --- | --- |
| ггде |  |
|  |  |
|  |  |

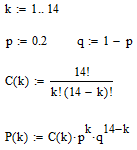
Нетрудно убедиться, что .

В MathCAD для вычисления плотности вероятности и функции распределения случайной величины, имеющей биномиальное распределение, предназначены функции dbinom(*k, n, p*) и pbinom(*k, n, p*), значения которых – соответственно и .

**Задание 2.** Вероятность обнаружения дефекта в каждом из 14 проверенных двигателей равна 0,2. Вычислите и постройте графически плотность вероятности числа дефектных двигателей. Проверьте для него равенство . Постройте график функций распределения. Вычислите вероятность того, что число дефектных двигателей будет от 10 до 12 и наивероятнейшее число дефектных двигателей (и его вероятность).

Решение.

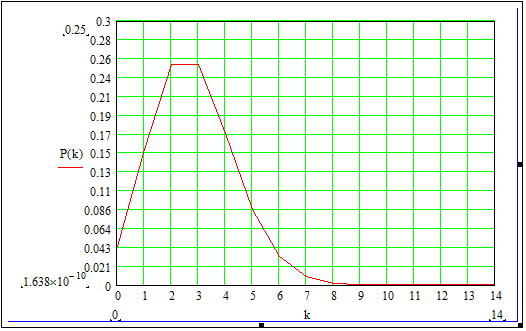
1. Вычислим вероятности обнаружения дефектных двигателей.



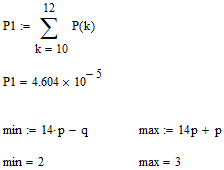
1. Проверим равенство .

Рисунок 10

1. Построим график плотности вероятности количества дефектных двигателей.

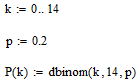


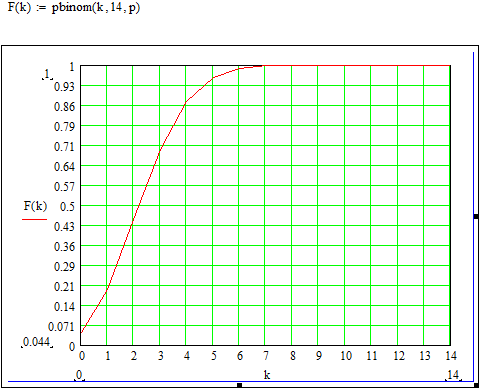
1. Вычислим вероятность того, что число дефектных двигателей от 10 до 12 и их наивероятнейшее число (и его вероятность).



1. Построим график функции распределения.

**Замечание 4.** Первый пункт решения можно записать с использованием функции dbinom(*k, n, p*).





**Геометрическое распределение.** Со схемой испытаний Бернулли можно связать еще одну случайную величину: – число испытаний до первого успеха. Эта величина принимает бесконечное множество значений от 0 до +*∞*, и ее распределение определяется формулой

.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Используя формулу бесконечно убывающей геометрической прогрессии, легко показать, что .

В MathCAD для вычисления плотности вероятности и функции распределения случайной величины, имеющей геометрическое распределение, предназначены функции dgeom(k, p) и pgeom(k, p), значения которых – соответственно и .

**Пуассоновское распределение.** Пуассоновское распределение имеет случайная величина , принимающая значения  с вероятностями ,

где  – параметр пуассоновского распределения

При любых .

В MathCAD для вычисления вероятности и функции распределения случайной величины, имеющей пуассоновское распределение, предназначены функции dpois(*k*,) и ppois(*k*,), значения которых – соответственно и .

**Задание 4.** Рабочий проверяет 1000 клапанов. Вероятность прогара клапана 0,0004. Найти вероятность того, что дефект будет обнаружен на пяти клапанах. Вычислите и постройте графически плотность вероятности количества дефектных клапанов. Проверьте для него равенство . Постройте график функций распределения. Вычислите вероятность того, что количество дефектных клапанов окажется в интервале от 50 до 84.

1. **Непрерывные случайные величины.**

При решении практических задач с непрерывными случайными величинами чаще всего приходится сталкиваться со случайными величинами, распределёнными по равномерному, экспоненциальному (показательному) или нормальному законам распределения. Рассмотрим их отдельно.

**Равномерное распределение.** Непрерывная случайная величина , принимающая значения на отрезке *,* распределена равномерно на , если плотность распределения  и функция распределения случайной величины имеют соответственно вид

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

В Mathcad значения в точке плотности распределения и функции распределения случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке , вычисляются встроенными функциями соответственно dunif(*x,a,b*) и punif(*x,a,b*).

**Задание 5.** Постройте графики плотности и функции распределения равномерного закона на отрезке .

**Экспоненциальное (показательное) распределение**. Непрерывная случайная величина имеет показательное распределение с параметром , если её плотность распределения имеет вид



Отсюда видно, что показательно распределённая случайная величина принимает только неотрицательные значения. Функция распределения такой случайной величины имеет вид



В MathCAD значения в точке плотности распределения и функции распределения случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение с параметром , вычисляются встроенными функциями соответственно dexp(*x*,) и pexp(*x*,).

**Задание 6.** Постройте графики плотности и функции распределения показательного закона с параметром .

**Нормальное распределение**. Это распределение играет исключительно важную роль в теории вероятностей и математической статистике. Случайная величина нормально распределена с параметрами и , , если её плотность распределения имеет вид

.

Если случайная величина  имеет нормальное распределение с параметрами  и , то будем записывать это в виде ~. Случайная величина  имеет стандартное нормальное распределение, если  и , ~. Плотность стандартного нормального распределения имеет вид

,

а его функция распределения , где  – функция Лапласа:

.

Функция распределения нормальной величины ~ также выражается через функцию Лапласа: .

В MathCAD значения в точке плотности распределения и функции распределения нормальной случайной величины с параметрами ,  вычисляются встроенными функциями соответственно  и .

**Задание 7.** Постройте графики плотности и функции распределения стандартного нормального закона.

**Задание 8.** Постройте графики плотности и функции распределения нормального закона с параметрами , .

1. **Числовые характеристики случайных величин.**

Каждая случайная величина полностью определяется своей функцией распределения. В то же время при решении практических задач достаточно знать несколько числовых параметров, которые позволяют представить основные особенности случайной величины в сжатой форме. К таким величинам относятся, в первую очередь, математическое ожидание и дисперсия.

Если  – дискретная случайная величина с распределением

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |

то её математическим ожиданием называется величина

,

если число значений случайной величины конечно. Если число значений случайной величины счетно, то .

При этом если ряд в правой части равенства расходится или сходится условно, то говорят, что случайная величина  не имеет математического ожидания.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины с плотностью вероятностей  вычисляется по формуле

.

При этом если интеграл в правой части равенства расходится, то говорят, что случайная величина не имеет математического ожидания.

При вычислении математического ожидания случайной величины полезны следующие его свойства:

-математическое ожидание константы равно этой константе, т. е. ;

-математическое ожидание – линейный функционал случайной величины, т. е. при произвольных постоянных  и  верно равенство

;

-математическое ожидание произведения двух *независимых* случайных величин равно произведению их математических ожиданий, т. е.

.

Приведем формулы математических ожиданий для наиболее известных распределений:

-биноминальное распределение: : ;

-геометрическое распределение: : ;

-пуассоновское распределение: : ;

-равномерное распределение: , : ;

-экспоненциальное (показательное) распределение: , : ;

-нормальное распределение: : .

Дисперсия случайной величины характеризует меру разброса значений случайной величины около ее математического ожидания. Если случайная величина имеет математическое ожидание , то *дисперсией* случайной величины называется величина . Легко показать, что . Эта универсальная формула одинаково хорошо применима как для дискретных случайных величин, так и для непрерывных. Величина  вычисляется по формулам:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

для дискретных и непрерывных случайных величин соответственно.

Еще одним параметром для определения меры разброса значений случайной величины является *среднеквадратическое отклонение *, связанное с дисперсией соотношением .

Перечислим основные свойства дисперсии:

-дисперсия любой случайной величины неотрицательна: ;

-дисперсия константы равна нулю: ;

-для произвольной константы *с*: ;

-дисперсия суммы (разности) двух *независимых* случайных величин равна сумме их дисперсий: .

Приведем формулы для дисперсий наиболее известных стандартных распределений:

-биноминальное распределение: ;

-геометрическое распределение: ;

-пуассоновское распределение: ;

-равномерное распределение: ;

-экспоненциальное (показательное) распределение: ;

-нормальное распределение: .

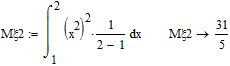
**Задание 9.** Случайная величина распределена непрерывно на промежутке [1,2]. Найдем математическое ожидание и дисперсию площади квадрата со стороной .

Решение. Хотя речь в условии идёт о переменной , от нас требуется найти характеристики случайной величины .

1. Найдем математическое ожидание .

Рисунок 15

1. Найдем математическое ожидание .



1. Найдем дисперсию .

Рисунок 17

1. Найдем среднее квадратическое отклонение .

Рисунок 18

**Задача 1.** Найти и построить функцию распределения дискретной случайной величины **Х** , заданной законом распределения.

№1 №2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -1 | 0 | 2 | 4 | 7 |
| р | 0,1 | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 |
| р | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

№3 №4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -5 | -4 | -3 | -1 | 1 |
| р | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,1 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| р | 0,3 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,1 |

№5 №6

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 |
| р | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,1 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -2 | -1 | 0 | 2 | 5 |
| р | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

№7 №8

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -4 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| р | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,1 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -3 | -2 | -1 | 2 | 3 |
| р | 0,2 | 0,4 | 0,1 | 0,1 | 0,2 |

№9 №10

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 |
| р | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,2 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 0 | 2 | 4 | 5 | 6 |
| р | 0,4 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,1 |

№11 №12

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -3 | -2 | 0 | 1 | 2 |
| р | 0,3 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,1 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 1 | 2 | 4 | 7 | 11 |
| р | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,3 | 0,2 |

№13 №14

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -1 | 2 | 5 | 7 | 10 |
| р | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| р | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,2 |

**Задача 2**. Производится ***п*** независимых испытаний, в каждом из которых событие А наступает с вероятностью ***р***.

1. Найти и построить график плотности вероятностей случайной величины Х–числа наступлений события А в ***п*** испытаниях.

2. Построить график функции распределения случайной величины Х.

3. Найти вероятность того, что событие А наступит от ***к1*** до ***к2*** раз.

4. Найти наивероятнейшее число наступлений события А и вероятность наступления этого числа.

Данные взять из таблицы 2.

Таблица 2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | ***п*** | ***р*** | ***к1*** | ***к2*** | Вариант | ***п*** | ***р*** | ***к1*** | ***к2*** |
| 1 | 10 | 0,3 | 6 | 9 | 8 | 15 | 0,1 | 10 | 12 |
| 2 | 12 | 0,4 | 7 | 10 | 9 | 12 | 0,2 | 3 | 6 |
| 3 | 14 | 0,2 | 8 | 10 | 10 | 14 | 0,4 | 2 | 6 |
| 4 | 16 | 0,3 | 2 | 5 | 11 | 16 | 0,2 | 10 | 14 |
| 5 | 18 | 0,1 | 6 | 10 | 12 | 18 | 0,8 | 3 | 6 |
| 6 | 20 | 0,3 | 15 | 18 | 13 | 20 | 0,1 | 10 | 15 |
| 7 | 15 | 0,2 | 7 | 10 | 14 | 25 | 0,3 | 20 | 24 |

**Задача 3.** Построить графики плотности и функции распределения:

а) равномерного распределения на отрезке [**b;с**];

b) показательного распределения с параметром **λ**;

с) нормального распределения с параметрами **а** и **σ**.

Данные взять из таблицы 3.

Таблица 3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | ***b*** | ***c*** | ***λ*** | ***a*** | ***σ*** | Вариант | ***b*** | ***c*** | ***λ*** | ***a*** | ***σ*** |
| 1 | 1 | 5 | 0,2 | 15 | 2 | 8 | 3 | 9 | 0,9 | 35 | 2 |
| 2 | 2 | 8 | 0,3 | 16 | 1,5 | 9 | 1 | 6 | 1 | 40 | 1,5 |
| 3 | 0 | 6 | 0,4 | 12 | 1 | 10 | 3 | 8 | 1,5 | 45 | 3 |
| 4 | -1 | 5 | 0,5 | 18 | 2 | 11 | -2 | 5 | 1,8 | 50 | 2,5 |
| 5 | -4 | 4 | 0,6 | 20 | 2,5 | 12 | 0 | 8 | 2 | 10 | 0,8 |
| 6 | 2 | 4 | 0,7 | 25 | 1,5 | 13 | 5 | 8 | 1,2 | 22 | 1,2 |
| 7 | 4 | 10 | 0,8 | 30 | 1,4 | 14 | 1 | 9 | 1,4 | 24 | 1,8 |

**Отчет о выполненной работе должен содержать:**

1. Тему и цель работы

2. Индивидуальное задание согласно варианту

3. Решение предложенных задач

**Вопросы к защите лабораторной работы**

1. Что называется законом распределения случайной величины?

2. Какие случайные величины называются непрерывными? дискретными?

3. Что называется функцией распределения? плотностью распределения?

**Лабораторная работа** **№ 5,6**

**Приложения теории вероятностей. Статистика.**

**Цель работы**: Изучить возможности MathCAD по работе с задачами в приложениях к теории вероятностей и статистики.

**Задание**: решить предлагаемую задачу.

1. **Работа с выборками.**

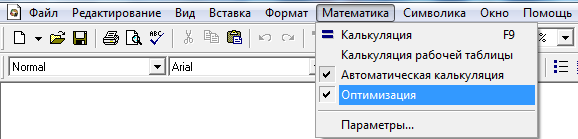
Ранее мы познакомились с различными инструментами MathCAD, позволяющими решать различные задачи из курса «Теории вероятностей». Было показано, каким образом можно вычислить вероятности тех или иных событий, каким образом находятся математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

В инженерной практике наиболее распространёнными являются величины, распределённые по нормальному, показательному (экспоненциальному) и равномерному законам. Часто бывает необходимым создать выборку, которая отвечала бы одному из этих законов распределения.

**Задание 1.** Сгенерируйте выборку 250 значений случайной величины, имеющей нормальное распределение N(150,10).

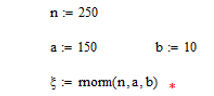
**Решение.**

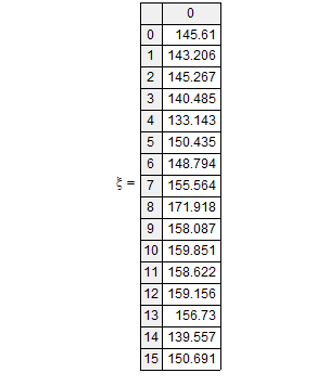
1.Установите в меню **Математика** (**Math**) режим **Оптимизация** (**Optimization**).



2.Введите объём выборки, равным 250.

3.Сгенерируйте выборку объема  значений случайной величины , имеющей нормальное распределение  с помощью функции , значением которой является вектор, содержащий  выборочных значений нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием  и средним квадратическим отклонением .





К элементам  можно обращаться так же, как и к элементам любого массива.

**Замечание 1.** Буква , с которой начинается функция, обозначает слово . Иными словами, такой командой мы выбираем случайным образом  элементов искомого закона распределения. Следует отметить, что такие функции имеются и для всех остальных функций распределения.

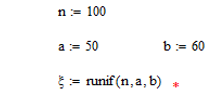
**Задание 2.** Сгенерируйте выборку 100 значений случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке от 50 до 60.

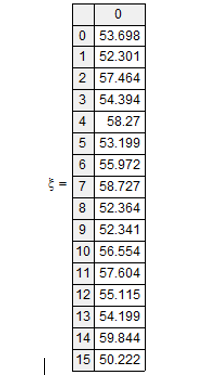
**Решение**.

1.Установите в меню **Математика** (**Math**) режим **Оптимизация** (**Optimization**).

2. Введите объём выборки, равным 100.

3. Сгенерируйте выборку объема  значений случайной величины , имеющей равномерное распределение на отрезке от 50 до 60.

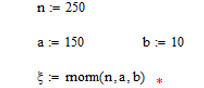


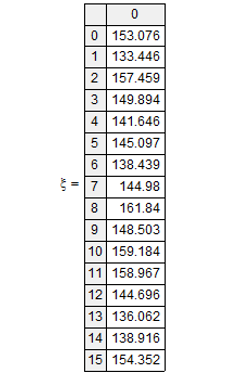


Задание тех или иных выборок всегда преследует какую-либо конкретную цель. Займёмся обработкой полученных выборок.

**Задание 3.** Для условий **Задания 1** вычислите максимальное, минимальное значения выборки и размах выборки. Выполните группировку (10 одинаковых интервалов), постройте соответствующую гистограмму, полигон частот.

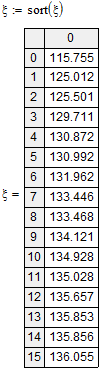
**Решение**.1. Так как мы выполняли задание 2, то значения элементов  изменились на элементы выборки равномерного закона. Поэтому необходимо вновь задать 





2. Обратите внимание, что числа  отличаются от тех, которые мы получили в задании 1.

3. Упорядочим выборку (вариационный ряд) по возрастанию.



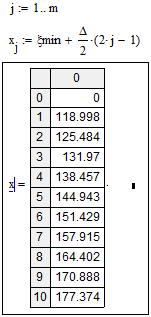
4. Вычислим максимальное, минимальное значения и размах выборки.

Рисунок 6

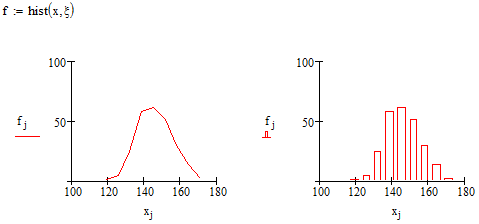
5. Определим число интервалов группировки  и их длину .

Рисунок 7

6. Определим середины интервалов группировки.



7. Построим гистограмму и полигон частот с помощью функции , где  – вектор середин интервалов группировки,  – выборка. При построении гистограммы в окне настройки изображения графиков пометьте **Пересечение** (**Crossed**) в пункте **Стиль осей графика** (**X-Y-Axes**) и установите тип линии **bar** в пункие **Трассировки** (**Traces**).



**Задача.** Сгенерируйте выборку ***п*** значений случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрам ***а*** и **σ**. Вычислить максимальное и минимальное значение выборки и ее размах. Выполнить группировку на ***к*** одинаковых интервалов. Построить полигон частот и гистограмму. Данные взять из табл.1.

Таблица 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | ***п*** | ***а*** | ***σ*** | ***к*** | Вариант | ***п*** | ***а*** | ***σ*** | ***к*** |
| 1 | 200 | 16 | 1,5 | 10 | 13 | 150 | 30 | 8 | 10 |
| 2 | 180 | 17 | 2 | 10 | 14 | 300 | 31 | 8,5 | 15 |
| 3 | 220 | 18 | 2,5 | 12 | 15 | 260 | 32 | 9 | 12 |
| 4 | 150 | 19 | 3 | 12 | 16 | 180 | 33 | 9,5 | 10 |
| 5 | 250 | 20 | 3,5 | 15 | 17 | 200 | 34 | 10 | 8 |
| 6 | 210 | 21 | 4 | 14 | 18 | 170 | 35 | 2 | 8 |
| 7 | 160 | 22 | 4,5 | 8 | 19 | 150 | 36 | 3 | 8 |
| 8 | 140 | 23 | 5 | 8 | 20 | 160 | 37 | 4 | 8 |
| 9 | 120 | 24 | 5,5 | 8 | 21 | 210 | 38 | 5 | 10 |
| 10 | 140 | 25 | 6 | 8 | 22 | 220 | 39 | 6 | 10 |
| 11 | 190 | 26 | 6,5 | 8 | 23 | 230 | 40 | 7 | 10 |
| 12 | 190 | 27 | 7 | 8 | 24 | 240 | 42 | 8 | 10 |

**Отчет о выполненной работе должен содержать:**

1. Тему и цель работы

2. Индивидуальное задание согласно варианту

3. Решение предложенных задач

**Вопросы к защите лабораторной работы**

1. Что называется выборкой?

2. Что называется полигоном и гистограммой?

3. Дайте определение равномерного, нормального, показательного распределения.

**Лабораторная работа №7**

**Теоретические распределения.**

**Основные характеристики распределений.**

**Цель работы**: познакомиться с реализацией основных распределений в среде MathCAD.

**Задание:** решить предлагаемые задачи.

Главной характеристикой непрерывно распределенной случайной величины является плотность вероятности. В общем случае она равна производной функции распределения и понимается как отношение вероятности попадания случайной величины в узкую окрестность определенного значения к размеру этой окрестности. С помощью плотности вероятности выводятся все важнейшие характеристики непрерывной случайной величины, такие как дисперсия или математическое ожидание.

Все функции теоретических плотностей в Mathcad именуются по следующему типу: в начале пишется приставка (от английского dencity – плотность), а затем вводится соответствующий корень слова. Например, плотность для нормального распределения задается функцией , а для распределения Стьюдента – .

В случае дискретных случайных величин в Mathcad также существуют функции (с приставкой ). Они служат для вычисления вероятности того, что случайная величина примет определенное конкретное значение. Однако, говорить при этом о плотности распределения некорректно, так как это понятие применимо только к непрерывным распределениям.

Чтобы ввести нужную функцию плотности вероятности, удобно использовать окно (вызывается сочетанием клавиш ( ). Нужные встроенные функции располагаются в нем в списке (Плотность вероятности).

Второй важнейшей характеристикой теоретического распределения является функция распределения. В общем случае она определяет, какова вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее *Х*:

В случае непрерывных случайных величин функция распределения определяется интегрированием плотности вероятности от левой границы области определения до *Х*:

Для дискретных случайных величин функция распределения задается как соответствующая сумма

,  
где означает, что суммируются вероятности значений меньших *Х*.

Важным свойством функции распределения является то, что она позволяет находить вероятность попадания случайной величины в числовой интервал без применения интегрирования:

.

В Mathcad определены обратные функции всех важнейших распределений, кроме дискретных распределений, для которых не существует обратной функции вероятности.

***Дискретные распределения***

1. Биномиальное распределение

Биномиальным называется закон для вычисления вероятностей, определяемых формулой Бернулли:

Термин «биномиальный» применяется к данному закону распределения вероятностей в связи с тем, что его формула выражает общий член разложения бинома Ньютона. Биномиальное распределение служит для вычисления вероятности того, что некоторое событие наступит в *n* испытаниях *k* раз, если вероятность его наступления постоянна при каждом испытании и равна *р*.

В Mathcad приведенной выше формуле соответствует функция .

**Пример**. Найти вероятность того, что при 10 бросках монеты количество выпадений орла и решки совпадет, ту же вероятность просчитать для 100, 1000 бросков.

**Решение**. Вероятность выпадения орла в каждом испытании постоянна и равна 0,5. Тогда вероятность того, что при 10 бросках орел выпадет 5 раз равна

Этот же результат можно получить при подсчёте вероятности по формуле Бернулли:

Вычислим аналогичную вероятность для большего количества бросков монеты:

, .

С помощью встроенной функции можно просто решать множество задач.

**Пример**. Какова вероятность того, что при 1000 бросках орел выпадет от 450 до 550 раз?

**Решение**. -

С помощью встроенной функции , где - вероятность наступления события можно решать следующие задачи.

**Пример**. Сколько раз выпал орел при 10 бросках, если вероятность этого события равна 0.34 (0.95)?

**Решение**. ,

Полученные результаты можно интерпретировать следующим образом: при 10 бросках с вероятностью 0.34 орел выпадет4 или меньше раз (при вероятности 0.95 соответственно будет 8 или меньше выпадений).

Генератором случайных чисел, распределенных по биномиальному закону, является в Mathcad функция , где *N*  - количество элементов случайного вектора.

1. Распределение Пуассона

Распределение Пуассона является частным случаем биномиального распределения и описывается так:

где .

Приведенная формула применятся для облегчения расчетов в случае большого количества испытаний и малой вероятности появления события.

Для задания распределения Пуассона используется встроенная функция .

**Пример.** Завод отправил потребителю 6000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения в пути равна 0.03%. Какова вероятность того, что будет испорчено 10 изделий?

**Решение**. *n:=6000 p:=0.0003 k:=10*

Определяем параметр и подсчитываем вероятность:

:= = 1.8

Другим распространенным обобщением формулы Бернулли является теорема Муавра – Лапласа, позволяющая вычислять вероятности при больших количествах испытаний.

Встроенных функций, реализующих подсчет исходя из локальной и интегральной формул Лапласа, в Mathcad нет. Однако при необходимости можно задать их самостоятельно.

**Пример**. Вероятность рождения мальчика равна 0.51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

**Решение**. *n:=100 k:=50 p:=0.51 q:=1-p q=0.49*

Воспользуемся локальной теоремой Лапласа, так как *n=100* – достаточно большое число.

*x= - 0.2*

**Пример**. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0.17. Найти вероятность того, что событие появится не менее 1470 и не более 1500 раз.

**Решение**. *n:=2100 k1:=1470 k2:=1500 p:=0.7 q:=1-p q=0.3*

Для решения воспользуемся интегральной теоремой Лапласа

1. Геометрическое распределение

Если вероятность наступления события описывается формулой:

,

то считается, что случайная величина распределена по геометрическому закону. Определяет же геометрическое распределение вероятность наступления некоторого события на *k* – ом испытании, если вероятность его наступления одинакова при каждом опыте.

В Mathcad функцией, служащей для вычисления вероятности наступления события, подчиненного геометрическому закону, является , где *k* – количество испытаний, *p* – вероятность наступления события в одном испытании.

**Пример**. Вероятность попадания в цель из пушки равна 0.11, какова вероятность того, что цель будет поражена на 2 – м , 5 – м, 10 – м, 20 – м выстреле?

**Решение**.

В том случае, если стоит вопрос: какова вероятность того, что цель будет поражена до *k* – ого выстрела, то для решения этой задачи необходимо использовать функцию распределения .

**Пример**. Определение вероятности попадания в цель до *k* – ого выстрела.

**Решение**.

Часто задача ставится следующим образом: сколько выстрелов нужно сделать, чтобы попасть в цель с вероятностью ? В этом случае используется встроенная функция .

**Пример**. Определение количества попаданий в цель.

**Задача.** Производится ***п*** независимых испытаний случайной величины Х, в каждом из которых событие А появляется с вероятностью ***р***. Найти:

1. вероятность того, что событие А наступит ровно ***m*** раз;

2. вероятность того, что событие А наступит от ***m1*** до ***m2*** раз;

3. вероятность того, что событие А наступит не менее ***к*** раз;

4. сколько нужно произвести опытов, чтобы событие А появилось с вероятностью ***р1***?

Данные в таблице 1.

Таблица 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | ***n*** | ***p*** | ***m*** | ***m1*** | ***m2*** | ***p1*** | ***k*** | Вариант | ***n*** | ***p*** | ***m*** | ***m1*** | ***m2*** | ***p1*** | ***k*** |
| 1 | 10 | 0,2 | 6 | 5 | 8 | 0,8 | 7 | 8 | 20 | 0,8 | 8 | 12 | 15 | 0,7 | 16 |
| 2 | 12 | 0,15 | 4 | 3 | 7 | 0,1 | 10 | 9 | 11 | 0,7 | 4 | 6 | 8 | 0,9 | 9 |
| 3 | 8 | 0,3 | 5 | 2 | 4 | 0,9 | 6 | 10 | 13 | 0,9 | 3 | 5 | 9 | 0,85 | 10 |
| 4 | 15 | 0,2 | 6 | 10 | 12 | 0,7 | 12 | 11 | 15 | 0,8 | 6 | 3 | 9 | 0,8 | 10 |
| 5 | 14 | 0,25 | 8 | 9 | 12 | 0,8 | 11 | 12 | 17 | 0,75 | 15 | 8 | 11 | 0,85 | 12 |
| 6 | 16 | 0,2 | 3 | 5 | 9 | 0,75 | 12 | 13 | 19 | 0,6 | 11 | 5 | 8 | 0,75 | 12 |
| 7 | 18 | 0,15 | 12 | 8 | 11 | 0,8 |  | 14 | 9 | 0,85 | 8 | 2 | 6 | 0,6 | 7 |

**Отчет о выполненной работе должен содержать:**

1. Тему и цель работы

2. Индивидуальное задание согласно варианту

3. Решение предложенных задач

**Вопросы к защите лабораторной работы**

1. Что называется законом распределения случайной величины?

2. Какие основные законы распределения известны?

**Лабораторная работа №8**

**Числовые характеристики дискретных случайных величин.**

**Цель работы**: изучить способы вычисления числовых характеристик случайных величин с использованием пакета Mathcad.

**Задание**: решить представленную задачу.

1. Математическое ожидание.

*Определение*. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на вероятности этих значений.

Если случайная величина принимает значения с разной вероятностью, математическое ожидание вычисляется по формуле

**Пример**. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, закон распределения которой задан таблицей:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Р | 0,15 | 0,25 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

Зададим векторы

Найдем математическое ожидание

Если случайная величина принимает ряд значений с равной вероятностью, то математическое ожидание определяется как среднее арифметическое значение некоторого количественного признака выборки.

В Mathcad среднее значение выборки можно подсчитать с помощью функции *mean(x)*.

**Пример**. При измерении величины силы тока были получены следующие значения: 0.45, 0.49, 0.44, 0.42, 0.48, 0.41, 0.44, 0.56, 0.47, 0.45, 0.52, 0.43. Вычислить выборочное среднее

=0.463

При обработке экспериментальных данных среднее значение выборки считается равным значению параметра. Это утверждение верно только в том случае, если выборка является генеральной, т.е. содержит все возможные значения измеряемой величины. В реальной ситуации с генеральными совокупностями работать невозможно, а всегда приходится делать из них некоторые небольшие выборки. В зависимости от условий отбора и объема выборки она может передавать особенности генеральной совокупности с различной точностью. При этом такие характеристики, как среднее значение и дисперсия, приобретают случайный характер. Исследование особенностей поведения такого рода величин – очень сложная и важная статистическая задача.

1. Дисперсия и среднеквадратичное отклонение

*Определение.* В статистике дисперсией называется среднее арифметическое квадратов отклонений случайной величины от ее среднего значения:

В общем случае дисперсия является характеристикой степени рассеяния значений выборки по сравнению с ее средней величиной.

В Mathcad простая выборочная дисперсия вычисляется с помощью функции . Кроме того, существует и функция , которая определяет исправленную дисперсию, которая на практике используется для несмещенной оценки генеральной дисперсии при малом объеме выборки:

На практике используют не саму дисперсию, а квадратный корень из нее, который называется среднеквадратичным отклонением. В Mathcad существуют две функции для вычисления этого параметра: – выборочное стандартное отклонение и – исправленное среднеквадратичное отклонение.

**Пример**. Подбрасывается игральный кубик. Случайная величина Х – количество выпавших очков. Найти дисперсию и среднеквадратичное отклонение случайной величины Х.

Аналогичные результаты получаются и при использовании формул:

.

1. Мода и медиана

*Определение.* Модой в статистике называют варианту, которая встречается в выборке наиболее часто. В Mathcad подсчитать моду выборки можно с помощью встроенной функции . В случае, если все варианты встречаются в выборке с одинаковой частотой, система выдаст сообщение: (ни одна величина не встречается чаще, чем все остальные).

*Определение*. Медианой называется варианта, которая делит вариационный ряд (рассортированную выборку) на две части, равные по количеству вариант. То есть если количество элементов выборки нечетное и равно , то медианой будет являться – й элемент. В случае четного количества вариант медиана определяется как среднее арифметическое между – м и – м элементами выборки. В Mathcad медиана вычисляется с помощью встроенной функции .

**Пример**. Вычисление моды и медианы

Статистические функции работают не только с векторами - столбцами,но и с векторами – строками.

1. Размах варьирования

Важная характеристика рассеяния вариационного ряда – размах варьирования может быть просто вычислена в Mathcad с помощью двух специальных матричных функций: – находит максимальное значение в выборке, – функция находит минимальную величину в выборке. Используя описанные функции, размах варьирования можно задать как

.

Пример. Вычисление размаха варьирования. Для задания вектора выборки воспользуемся генератором случайных чисел, распределенных по показательному закону:

.

1. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Для решения некоторых задач в статистике бывает необходимым определить, на какое максимальное целое число делятся без остатка все величины в выборке. В Mathcad очень просто вычислить такое число. Для этого необходимо воспользоваться встроенной функцией (от англ. Greatest common divisor – наибольший общий делитель).

Схожей с описанной является задача поиска наименьшего числа, которое делится без остатка на все значения элементов выборки. В Mathcad ее можно решить с помощью встроенной функции (сокращение от Least common multiple – наименьшее общее кратное).

Пример. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

**Задача.** Для заданных случайных величин найти числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану), размах варьирования, а также наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное элементов массива Х.

№1 №2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -1 | 0 | 2 | 4 | 7 |
| р | 0,1 | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 |
| р | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

№3 №4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -5 | -4 | -3 | -1 | 1 |
| р | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,1 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| р | 0,3 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,1 |

№5 №6

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 |
| р | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,1 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -2 | -1 | 0 | 2 | 5 |
| р | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

№7 №8

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -4 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| р | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,1 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -3 | -2 | -1 | 2 | 3 |
| р | 0,2 | 0,4 | 0,1 | 0,1 | 0,2 |

№9 №10

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 |
| р | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,2 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 0 | 2 | 4 | 5 | 6 |
| р | 0,4 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,1 |

№11 №12

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -3 | -2 | 0 | 1 | 2 |
| р | 0,3 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,1 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 1 | 2 | 4 | 7 | 11 |
| р | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,3 | 0,2 |

№13 №14

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -1 | 2 | 5 | 7 | 10 |
| р | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| р | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,2 |

**Отчет о выполненной работе должен содержать:**

1. Тему и цель работы

2. Индивидуальное задание согласно варианту

3. Решение предложенных задач

**Вопросы к защите лабораторной работы**

1. Дайте определение основных числовых характеристик случайной величины (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, мода, медиана). Каков их вероятностный смысл?

2. Что называется размахом выборки?

**Лабораторная работа № 9**

**Проверка статистических гипотез.**

**Цель работы**: изучить методы проверки некоторых статистических гипотез.

**Задание:** 1) для данной выборки проверить гипотезы о том, что она распределена а) по нормальному закону; б) по показательному закону.

2) найти доверительный интервал для математического ожидания

3) построить гистограмму относительных частот.

1. Распределение Фишера. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей.

Отношение двух независимых случайных величин, распределенных по закону χ2, описывается распределением Фишера – Снедекора. На практике F – критерий Фишера применяется для проверки нулевой гипотезы о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей. Подобная задача возникает в том случае, если требуется сравнить точность приборов, инструментов или воспроизводимость результатов измерения, полученных различными методами. Из них необходимо выбрать тот, который дает меньшую дисперсию, то есть ошибку.

Распределение Фишера зависит от количества степеней свободы случайных величин. На практике для проверки гипотезы используют таблицы критических точек распределения Фишера – Снедекора. В том случае, если задача решается в Mathcad, можно применить встроенную функцию , где – уровень значимости, – число степеней свободы большей исправленной дисперсии, – меньшей. Если отношение исправленных дисперсий меньше квантили распределения Фишера, то нулевую гипотезу о равенстве дисперсий принимают, в противном случае – отвергают.

**Пример**. Для сравнения точности двух станков взяты две пробы, объемы которых и . В результате измерения контролируемого размера отобранных изделий получены следующие результаты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1,08 | 1,10 | 1,12 | 1,14 | 1,15 | 1,25 | 1,36 | 1,38 | 1,40 | 1,42 |
|  | 1,11 | 1,12 | 1,18 | 1,22 | 1,33 | 1,35 | 1,36 | 1,38 | - | - |

Можно ли считать, что станки обладают одинаковой точностью, если принять уровень значимости и в качестве конкурирующей гипотезы .

**Решение**. Задаем векторы случайных величин, объемы выборок и уровень значимости:

Вычисляем исправленные дисперсии выборок:

Определяем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

Находим критическую точку , задействовав функцию . Для конкурирующей гипотезы необходимо принять уровень значимости, уменьшенный вдвое.

Следовательно, нет оснований отвергать нулевую гипотезу, то есть считать точность станков различной.

1. Проверка гипотезы о нормальном распределении

Часто в статистике требуется установить, является ли данное распределение нормальным, а если оно таким не является, то с помощью какой-нибудь количественной характеристики показать меру отклонения данного распределения от нормального. В качестве таких характеристик используются асимметрия и эксцесс. Для нормального распределения эти характеристики равны нулю.

Асимметрия позволяет оценить меру отклонения функции данного распределения от центра рассеяния. Для генеральной совокупности асимметрия вычисляется с учетом исправленного среднеквадратичного отклонения:

Асимметрия положительна, если вытянут правый участок кривой распределения, и отрицательна, если левый. В Mathcad асимметрию для генеральной совокупности по данным некоторой выборки можно подсчитать с помощью функции .

Если асимметрия распределений одинакова, их кривые могут значительно различаться: одни будут иметь более высокие и острые пики, другие, наоборот, будут изменяться очень плавно. Показателем остроты пика является эксцесс. Для генеральной совокупности эксцесс рассчитывается с учетом исправленного среднеквадратичного отклонения по формуле:

Если эксцесс больше нуля, то распределение имеет более острую вершину, чем нормальное, если же он меньше нуля – наоборот. В Mathcad эксцесс для генеральной совокупности по данным выборки можно подсчитать, используя встроенную функцию .

**Пример**. Рассматривая распределение длины тормозного пути автомобиля, проверить гипотезу о том, что интересующий нас признак распределен по нормальному закону распределения (приняв ).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Тормозной путь, | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 |
| Количество опытов, | 1 | 2 | 3 | 5 | 10 | 13 | 9 | 6 | 1 |

Решение. В Mathcad необходимо представлять все имеющиеся данные в виде вектора, в котором каждая варианта встречается указанное количество раз. В нашем примере для корректной работы функций и нужно задать вектор длины тормозного пути длиной равной общему количеству опытов.

Формируем вариационный ряд и вектор частот:

x

0

36



x

1

37



x

2

37



x

3

38



x

4

38



x

5

38



x

6

39



x

7

39



x

8

39



x

9

39



y

9

9



y

0

0



y

1

1



y

2

2



y

3

3



y

4

4



y

5

5



y

6

6



y

7

7



y

8

8



С помощью вложенного цикла задаем вектор длины тормозного пути:

Vector

n

0



V

n

x

i



j

1

y

i





for

n

n

1





i

0

last

x

(

)





for

V





Теперь как длину полученного вектора определяем объем выборки, используя функцию .

Если асимметрия и эксцесс превысят по модулю утроенные значения собственных среднеквадратичных отклонений, то гипотезу о нормальности распределения следует отвергнуть. Иначе она должна быть принята.

Вычисляем асимметрию, эксцесс и среднеквадратичные отклонения для них:

Проверяем критерии согласия:

Требуемые условия выполняются, значит, в генеральной совокупности признак распределен по нормальному закону.

1. Проверка гипотезы о показательном распределении

Если случайная величина распределена по показательному закону, математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение должны совпадать. Это используется для проверки гипотезы о показательном распределении экспериментальных данных.

**Пример**. В результате испытания 200 элементов на длительность работы получено следующее распределение

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0-5 | 5-10 | 10-15 | 15-20 | 20-25 | 25-30 |
|  | 133 | 45 | 15 | 4 | 2 | 1 |

(в первой строке указаны интервалы времени в часах, во второй – количество элементов, проработавших время в пределах соответствующего интервала). Требуется при уровне значимости проверить гипотезу о том, что время работы элементов распределено по показательному закону.

**Решение**. Для проверки гипотезы нам необходимо создать вектор данных, длина которого равна объему выборки. В нашем случае распределение случайной величины задано в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот, поэтому в качестве «представителя» каждого интервала выберем его середину. Создадим вектор середин интервалов

Зададим вектор частот:

Представим случайную величину в удобной для анализа в Mathcad форме, а затем оценим ее математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение:



Оценки математического ожидания и среднеквадратичного отклонения оказались довольно близкими, а это означает, что нет оснований отвергать гипотезу о распределении времени работы элементов по показательному закону.

1. Доверительные интервалы

При проведении различных исследований часто приходится с необходимостью дать точную количественную оценку какого–либо свойства изучаемого объекта. При измерении некоторой физической величины нужно помнить, что ни одни экспериментальные данные не отражают ее истинного значения. На практике любое измерение или анализ всегда имеют погрешности различной величины и природы. Искажение результатов измерений связано с несовершенством используемых инструментов, погрешностью методики, а также с влиянием контролируемых и неконтролируемых внешних факторов. Ряд погрешностей можно устранить: например, выбрать прибор более высокого класса точности, провести определение относительно некоторого объекта, попытаться выполнить эксперимент максимально аккуратно и т.д. Ошибки, исключить которые невозможно, приводят к тому, что измеряемая величина принимает случайные значения, попадающие в тот или иной интервал с определенной вероятностью. Таким образом, при проведении отдельного опыта мы всегда получаем некоторое значение случайной величины. Истинное значение измеряемой величины мы можем оценить по среднему арифметическому результатов отдельных наблюдений с помощью доверительного интервала, покрывающего неизвестный параметр с заданной надежностью:

.

**Пример**. Произведено шесть независимых равноточных измерений физической величины. Получены следующие результаты: 87,85; 88,01; 87,89; 87,56; 87,73; 87,90. Требуется оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью 0,95.

**Решение**. За истинное значение измеряемой величины обычно принимается среднее арифметическое результатов наблюдений, поэтому нам необходимо оценить его с помощью доверительного интервала.

Для определения границ доверительного интервала случайной погрешности по формуле

нам необходимо рассчитать среднеквадратичное отклонение результата измерения

где – «исправленное» среднеквадратичное отклонение, – коэффициент Стьюдента при заданном уровне надежности и количестве степеней свободы. в Mathcad можно найти с помощью функции

Мы изначально предполагаем, что экспериментальные данные распределены по нормальному закону, так как достаточно надежного метода оценки нормальности распределения при объеме выборки меньше 15 не существует.

Числовое значение погрешности должно содержать не более двух значащих цифр. Так же при записи доверительного интервала среднее арифметическое результатов измерений и их погрешность должны иметь одинаковое количество знаков после запятой. Поэтому в нашем случае конечный ответ необходимо представить в следующем виде: . Данная запись означает, что истинное значение измеряемой величины заключено в данном интервале с надежностью 0,95.

1. Построение полигона и гистограммы

Гистограмма – это график, позволяющий визуализировать частоту попадания данных экспериментальной выборки в определенный интервал. При ее построении область, определяемая по размаху значений данных в выборке, разбивается на некоторое количество промежутков (как правило, равных), и затем подсчитывается количество или процент элементов, оказавшихся на каждом из них. Сама гистограмма представляет собой столбчатую диаграмму, ширина сегмента которой соответствует величине промежутка, а высота – сумме частот либо относительной частоте попадания в него данных.

Чтобы построить гистограмму в Mathcad, следует вызвать функцию histogram(n,data): n – количество сегментов гистограммы, data – вектор экспериментальных данных.

Результатом работы функции histogram является матрица размерности , в первом столбце которой содержатся значения середин сегментов раз-биения, во втором – количество элементов выборки, попавших на каждый из интервалов.

При построении графика – гистограммы по умолчанию система соединит точки, координатами которых являются середины и высоты столбцов гистограммы, ломаной линией. Полученный таким образом график называется в статистике полигоном распределения.

Чтобы построить график в форме гистограммы, необходимо выполнить следующую последовательность действий.

1. Постройте по имеющимся данным полигон, настройте параметры осей и пределы графической области.
2. Дважды щелкнув левой кнопкой мыши на графике, откройте диалоговое окно Formatting Currently Selected Graph (форматирование выбранного графика).
3. В списке Type (тип) вкладки Traces (ряды данных) открытого диалогового окна выберите строку solidbar (гистограмма).
4. Нажмите ОК.

**Пример**. Возраст студентов одного потока представляется следующими данными: 17,20,18,19,18,17,20,21,24,22,20,21,20,19,18,20,21,22,25,20. Построить вариационный ряд, полигон и гистограмму относительных частот по данному распределению выборки.

**Решение**. Задаем вектор данных, количество сегментов диаграммы и статистический ряд распределения, как функцию histogram.

Вычисляем относительные частоты :

Определяем шаг и, учитывая его длину, рассчитываем плотности относительных частот :

Строим полигон и гистограмму, отложив по оси абсцисс интервалы вариации , а по оси ординат – соответствующие плотности относительных частот .



Рисунок. Полигон относительных частот наблюдения вариант в выборке

Площадь гистограммы относительных частот должна быть равна единице. В нашем случае данное условие соблюдается, значит, задача решена верно.

Вариант 1.

1,03 1,10 1,11 0,82 1,02 0,99 1,20 1,00 0,90 0,92 0,83 1,03 0,97 1,02 1,09 0,93 1,01 1,13 0,96 1,13 1,17 0,99 0,97 0,96 0,90 0,85

1,25 0,99 1,13 1,55 1,02 1,01 1,06 0,91 1,07 0,96 0,95 1,03 0,87

1,10 1,10 1,09 0,81 1,15 1,01 0,93 1,05 1,01 1,13 1,04 0,80 1,02

0,91 1,05 1,07 1,01 1,04 0,86 0,96 1,16

Вариант 2

2,18 2,29 2,26 2,12 2,05 2,14 1,83 1,98 2,24 2,40 2,14 1,92 2,04

1,61 2,15 1,78 1,82 2,04 1,76 2,03 1,94 1,88 1,92 1,96 2,18 2,02

1,78 2,11 2,01 2,00 2,14 2,24 1,76 1,95 1,60 1,93 2,07 2,29 1,75

2,07 1,78 2,19 1,83 2,33 2,25 2,37 1,80 2,16 1,78 1,99 2,20 2,44

2,37 1,91 2,40 2,02 2,15 2,39 2,06 2,12

Вариант 3

2,71 3,57 3,58 2,88 2,89 2,93 3,22 3,08 2,69 2,87 2,75 2,99 3,19

2,78 2,57 2,77 3,26 3,08 2,69 3,00 3,15 3,07 2,95 2,63 3,13 2,79

3,05 3,45 3,23 3,56 2,94 2,89 3,06 3,35 2,63 3,30 3,17 3,21 3,26

3,15 3,56 3,02 2,41 2,82 3,27 3,01 3,25 2,91 3,17 3,06 2,68 3,33

3,10 2,61 3,54 3,04 3,16 2,96 2,65 2,81

Вариант 4

4,45 4,08 4,78 3,19 3,40 4,69 2,95 4,25 3,41 3,85 4,27 4,65 3,61 4,12 3,68 4,13 3,52 3,97 4,46 4,06 4,19 4,64 2,88 4,20 3,75 3,40 4,33 3,20 4,78 3,93 4,02 3,79 3,61 4,66 3,41 4,05 4,01 3,48 4,06 3,21 3,69 3,46 3,17 3,73 3,65 3,81 3,18 3,92 3,86 3,81 4,35 3,62 3,50 400 3,70 3,58 4,50 4,01 3,49 4,06

Вариант 5

5,94 4,70 5,71 4,80 4,75 5,19 4,50 5,33 5,09 5,56 4,77 5,45 5,75 4,47 4,37 5,13 4,37 5,88 4,78 5,55 5,11 4,94 4,83 5,18 4,81 4,61 4,39 5,24 5,20 4,85 5,02 4,98 4,75 4,43 5,48 5,29 5,60 5,06 4,87 4,88 5,77 5,28 4,90 4,65 4,50 4,87 4,99 4,32 5,47 5,16 4,83 6,08 4,61 5,78 5,71 5,31 4,49 5,24 4,93 4,72

Вариант 6

5,50 5,79 6,99 6,35 5,54 7,04 7,00 5,57 5,69 5,50 6,69 4,98 6,26 4,86 5,67 6,25 6,26 5,74 5,71 5,70 5,08 5,21 6,85 6,51 6,27 6,87 5,42 5,73 6,60 5,09 6,38 6,28 6,08 5,77 6,56 6,63 6,00 6,21 5,20 5,96 5,12 6,53 5,88 6,71 6,18 6,74 5,56 6,18 6,26 5,97 7,14 5,62 6,74 6,74 6,32 5,82 6,10 6,74 5,94 5,05

Вариант 7

7,00 7,23 7,03 6,43 7,39 6,99 7,45 7,42 6,39 7,02 7,10 6,67 7,93 6,21 6,83 6,49 6,45 5,82 7,41 7,17 7,14 6,15 4,76 7,44 7,71 7,43 7,56 7,68 7,65 7,27 6,21 7,45 7,42 6,24 6,67 7,30 7,73 6,96 7,53 7,63 7,76 6,44 6,70 7,57 5,85 6,37 8,16 6,87 7,89 6,60 6,97 6,42 7,32 6,94 7,10 6,78 7,33 5,52 7,01 6,86

Вариант 8

8,51 7,99 7,41 8,72 7,63 7,60 7,51 9,50 8,02 9,76 8,27 8,37 8,73 7,64 9,82 6,82 7,49 8,91 8,37 9,91 6,02 7,32 9,09 9,26 8,66 8,23 8,39 8,60 7,55 7,82 7,95 7,41 7,78 7,93 8,82 7,86 6,37 7,92 8,83 8,91 8,28 8,76 6,90 8,43 7,27 7,82 7,28 9,56 7,87 8,27 8,99 8,11 5,72 7,77 7,55 6,91 7,60 7,50 8,95 7,05

Вариант 9

7,62 9,34 8,21 7,52 8,43 8,83 8,56 7,72 9,23 8,74 8,27 9,05 6,86 8,83 8,16 9,32 9,35 9,09 7,36 8,85 7,88 9,55 9,18 9,60 7,94 8,15 7,42 9,22 9,51 9,89 8,87 8,57 8,68 9,36 8,81 8,45 9,54 8,68 8,90 8,63 8,73 9,65 8,69 7,41 9,13 9,96 7,78 8,52 8,84 9,96 8,15 8,84 8,43 10,21 10,61 10,73 11,08 11,41 10,48 10,55

Вариант 10

10,12 10,42 11,62 9,39 9,49 9,68 7,86 11,35 10,11 9,33 10,46 8,95 10,88 9,74 12,36 10,97 9,92 10,59 10,59 11,04 8,49 9,44 12,12 11,40 11,21 9,32 10,13 9,21 10,46 8,55 9,39 9,95 10,36 11,71 10,65 7,96 10,12 8,81 11,46 10,55 11,31 9,35 7,55 10,57 11,15 9,50 10,85 10,14 9,46 9,19 10,81 9,91 10,46 9,11 9,84 9,46 10,12 11,53 9,75 11,30

Вариант 11

11,41 11,28 12,07 9,95 11,55 11,05 8,19 9,95 13,24 10,10 12,04 9,03 10,61 11,85 12,21 9,34 13,11 10,39 13,43 11,66 12,45 10,16 11,38 10,94 10,67 11,85 10,82 12,96 9,37 10,59 11,16 9,39 10,47 9,70 11,27 9,68 11,68 11,75 11,75 9,57 10,07 8,60 12,52 12,63 12,38 10,97 11,00 11,77 11,17 11,48 11,61 10,80 12,48 10,84 12,41 11,35 10,85 10,99 11,09 8,93

Вариант 12

13,44 12,02 13,87 10,23 9,71 12,02 11,34 12,80 14,04 12,16 11,68 11,50 12,11 11,71 11,30 12,10 10,12 13,04 11,36 12,79 12,21 14,43 11,75 13,23 12,37 11,87 10,73 10,19 11,14 10,35 11,36 12,73 11,56 11,09 11,58 13,07 15,07 11,73 12,32 13,35 10,78 9,98 10,10 12,87 11,45 13,33 9,43 13,01 11,85 13,71 13,08 9,76 9,85 10,97 10,89 10,926 11,54 11,86 12,48 11 93

Вариант 13.

14,02 13,89 12,94 11,60 13,70 11,58 10,74 12,29 12,92 12,49 15,02

11,60 14,36 14,19 10,21 10,90 12,65 12,93 14,30 14,59 13,17 12,62

14,22 13,56 12,33 11,94 12,72 14,65 11,71 11,53 13,67 12,88 12,38

11,84 14,37 12,02 12,41 11,71 12,02 13,38 16,69 14,57 14,43 13,74

14,23 11,84 13,42 12,10 12,84 14,00 13,70 14,80 14,50 14,23 13,48

11,43 10,34 14,43 15,16 10,42

Вариант 14

16,06 14,65 13,88 13,66 15,01 12,90 13,25 12,31 15,07 12,89 17,30

12,91 14,25 16,35 15,63 12,91 17,46 13,93 14,95 13,25 16,01 13,11

10,42 14,23 12,38 14,49 12,44 14,28 12,76 11,00 16,28 15,87 12,80

14,99 13,79 15,51 14,51 12,32 12,32 13,79 13,94 14,07 12,70 14,66

14,61 11,65 13,24 12,59 13,53 12,97 13,09 17,20 10,47 14,73 14,67

14,75 14,81 14,95 13,40 16,55

Вариант 15

13,20 15,57 14,08 14,83 13,62 14,42 13,21 16,92 14,11 14,58 13,87

13,02 15,36 11,45 12,41 14,39 15,97 14,02 15,82 14,65 14,32 16,93

15,26 18,61 15,27 15,40 13,44 14,39 13,84 10,95 15,50 13,52 13,04

12,85 13,91 13,21 15,01 14,39 13,99 15,94 16,13 14,38 13,72 12,14

12,39 13,98 15,88 16,48 11,85 14,88 14,13 14,59 15,99 16,98 13,38 16,01 15,63 16,30 16,09 13,52

Вариант 16

15,22 15,18 15,22 18,48 17,87 15,97 17,99 13,90 11,52 17,81 16,84 17,10 18,30 13,74 19,69 18,72 15,55 17,27 14,12 17,07 16,16 15,86 14,67 15,24 15,21 17,63 17,46 15,87 17,87 14,51 14,94 19,54 15,13 15,54 12,94 17,60 17,01 15,58 16,62 17,05 15,72 15,62 18,15 18,04 15,74 17,36 15,96 15,31 15,69 17,46 15,99 15,69 14,98 15,93 15,02 17,16 13,73 16,16 16,59 12,67

Вариант 17.

16,17 15,36 19,74 18,58 14,81 17,63 16,85 18,66 18,56 18,02 16,55 16,68 13,89 16,18 19,67 16,89 14,42 18,90 16,90 18,57 10,56 18,59

16,41 15,45 17,00 16,76 16,71 16,73 16,86 15,73 19,62 19,44 17,08

15,14 15,71 16,05 18,01 18,08 18,29 20,67 16,95 16,47 16,75 15,35

18,32 20,11 17,76 15,64 17,51 18,05 19,62 14,97 17,76 17,40 16,60

15,99 15,90 17,00 12,93 15,42

Вариант 18.

16,04 20,07 16,46 18,05 18,30 15,35 19,37 16,47 18,80 20,62 20,16

15,05 20,91 19,84 16,44 16,75 17,08 15,31 15,86 18,07 15,45 17,20 17,76 18,63 22,48 18,65 18,02 18,29 16,29 15,89 16,64 17,97 18,40 19,19 18,20 18,08 20,39 16,78 20,16 18,18 18,78 16,48 16,87 16,50 17,40 18,12 19,05 19,55 18,71 18,96 15,74 17,45 15,62 20,12 16,10 18,24 19,13 18,38 18,67 16,82 20,13

Вариант 19

20,90 20,76 17,27 21,18 18,50 17,77 20,76 18,80 21,60 20,84 17,80

19,01 17,83 19,80 19,01 17,73 18,49 18,32 16,73 21,18 18,91 19,48

18,45 19,50 17,91 18,19 20,18 15,13 18,41 15,72 20,61 21,09 22,35

19,15 17,32 20,45 20,60 19,60 17,33 20,68 19,57 17,82 18,20 21,29

20,06 19,64 19,14 16,80 21,66 19,33 21,96 19,45 16,30 19,18 22,32

17,98 16,78 17,50 18,32 19,30

Вариант 20

20,51 21,17 23,62 17,32 18,31 22,12 20,93 25,22 18,78 21,35 16,92 20,88 16,90 19,49 17,26 18,10 19,78 19,18 18,18 20,00 19,06 16,36 19,56 18,18 22,21 18,70 26,14 23,41 19,58 19,60 20,44 21,54 19,72 17,77 22,06 17,70 21,73 18,96 22,18 20,83 21,13 21,95 18,17 21,74 19,17 21,35 22,28 17,68 14,40 20,95 16,45 19,69 20,62 19,95 22,11 20,40 20,12 19,40 19,54 18,16

Вариант 21

19,62 23,30 20,56 21,29 20,07 16,53 19,24 24,85 22,87 21,01 18,78 22,09 19,13 19,13 22,34 17,61 19,53 20,13 24,37 20,93 20,69 21,62 20,33 21,87 20,66 22,92 19,92 21,96 24,12 21,21 21,02 18,02 20,64 16,96 25,41 24,79 17,80 27,21 18,95 24,51 22,41 22,79 22,25 16,34 22,57 22,20 20,57 23,21 20,17 24,06 22,77 19,91 21,41 22,06 18,26 23,72 20,89 19,34 17,15 21,48

Вариант 22

20,08 19,98 24,59 21,77 19,51 21,56 23,27 23,25 19,68 26,08 23,35 25,08 22,29 24,55 22,51 25,50 24,80 23,04 21,32 21,42 23,98 27,51 21,20 19,99 18,61 25,70 20,07 21,90 25,91 21,97 20,52 21,15 22,26 22,50 20,68 19,15 19,82 18,52 21,72 20,41 18,95 23,96 20,29 18,90 20,03 20,68 20,81 25,19 16,23 21,59 25,25 18,21 18,97 21,31 23,07 16,29 27,97 20,46 20,84 22,14

Вариант 23

24,47 27,41 21,65 21,18 25,18 25,39 25,24 22,79 25,93 17,72 23,20 20,19 23,09 25,29 24,92 23,39 20,57 23,49 25,42 25,92 23,21 22,83 19,31 21,81 25,95 20,80 23,45 22,98 22,51 22,21 21,14 26,39 23,93 16,86 22,99 21,72 22,88 22,23 26,51 24,31 23,74 23,79 23,68 22,75 21,58 25,81 20,45 24,42 22,26 18,47 20,00 23,13 28,36 23,66 21,73 21,54 24,80 26,93 24,18 21,26

Вариант 24

24,27 19,59 26,73 22,89 19,52 18,66 26,48 24,41 23,49 21,38 21,78

21,17 27,71 25,53 21,50 24,98 23,09 25,33 25,26 27,02 25,12 23,52

27,77 24,25 20,52 21,18 22,00 30,76 21,49 22,88 22,96 26,77 24,29

25,54 21,73 19,38 21,35 23,12 22,37 24,50 22,79 27,07 28,90 24,79

21,27 30,71 27,03 28,63 23,35 22,65 25,84 26,89 23,41 24,89 24,71

25,45 28,42 26,29 25,92 21,37

Вариант 25

22,41 26,39 22,93 21,53 26,93 25,25 21,72 26,76 26,34 28,78 24,66

24,57 25,38 25,96 21,88 23,59 27,16 25,12 24,21 25,10 24,04 26,18

29,25 22,75 24,23 22,57 23,61 24,19 23,47 25,22 24,02 22,58 23,89

28,27 25,80 27,53 24,71 26,68 21,81 26,28 26,57 25,97 25,01 25,17

26,40 20,02 22,62 26,38 26,20 24,96 22,83 24,21 25,23 23,62 29,01

17,84 28,57 26,04 25,05 25,42

Вариант 26

25,48 26,09 24,77 26,11 26,41 29,19 27,22 26,71 25,58 23,38 24,31

25,16 28,99 23,62 25,66 28,81 29,43 20,82 28,56 28,48 22,86 31,42

28,30 27,62 25,56 32,13 23,36 26,22 23,81 21,26 23,81 28,27 27,80

31,49 26,33 24,89 28,03 28,58 28,54 25,42 28,59 27,07 26,57 23,87

23,02 26,07 24,01 21,94 26,65 27,69 24,52 26,71 28,50 25,49 26,61

24,86 25,41 31,57 28,78 26,40

Вариант 27

28,11 27,39 24,01 25,04 25,28 39,60 29,98 24,83 28,93 28,40 28,49

28,89 26,26 26,10 27,87 28,93 28,09 29,92 28,64 27,72 27,40 23,43

29,59 29,09 28,66 23,94 28,63 29,76 25,91 26,96 29,09 32,12 27,46

25,58 23,16 26,88 26,99 23,55 24,93 26,56 28,09 25,55 26,66 22,14

28,23 28,88 29,83 28,23 29,34 24,68 27,20 27,09 28,31 29,30 29,87

24,48 32,30 21,72 32,46 29,62

Вариант 28

30,18 24,94 31,32 33,24 30,55 23,35 30,60 30,65 25,48 23,29 26,22

24,27 20,35 21,75 26,12 27,17 29,83 29,63 25,21 33,45 26,46 29,73

24,78 28,77 23,75 29,05 30,00 22,89 25,12 27,53 27,46 25,49 28,49

25,41 28,44 32,24 26,83 26,13 25,13 31,75 23,80 20,81 30,10 27,93

31,53 26,80 23,42 24,45 22,73 29,60 24,66 30,12 28,89 29,37 31,42

29,22 26,18 27,47 32,58 31,30

Вариант №29

29,18 20,62 27,39 31,15 29,12 28,28 29,55 25,94 30,59 28,45 29,56

29,53 29,54 29,07 27,84 28,32 28,61 26,63 28,62 31,40 25,80 29,45

30,16 25,60 32,61 31,59 27,24 27,70 27,04 28,71 29,07 27,48 31,63

32,74 30,70 34,10 30,46 30,33 27,70 30,09 30,54 26,05 31,24 31,94

28,69 28,52 25,60 35,91 30,78 28,67 29,26 27,61 25,61 31,16 25,80

27,91 27,49 29,89 28,59 30,69

Вариант 30

34,88 38,99 32,83 28,47 27,53 29,99 28,52 30,33 31,56 28,78 З1,25

30,99 26,35 27,15 27,48 30,08 29,93 28,92 27,15 23,43 28,11 25,78

31,45 24,38 26,46 29,87 27,77 30,91 28,46 34,11 30,68 29,40 31,71

32,01 30,23 25,21 22,31 31,69 28,14 29,17 23,98 29,73 35,25 24,13

29,41 29,90 32,32 30,53 30,17 23,34 30,69 23,55 29,69 30,62 33,19

29,36 36,22 28,78 29,48 36,42

**Отчет о выполненной работе должен содержать:**

1. Тему и цель работы

2. Индивидуальное задание согласно варианту

3. Решение предложенных задач

**Вопросы к защите лабораторной работы**

1. Какие числовые характеристики случайной величины Вы знаете? Каков их вероятностный смысл?

2. Что называется статистической гипотезой?

3. Что называется доверительным интервалом?

4. Что называется полигоном; гистограммой?

Литература

1. Д. Гурский, Е.Турбина. Вычисления в MATHCAD 12. Питер 2006. – 710 с.
2. Р. И. Ивановский Теория вероятностей и математическая статистика. СПб.:БХВ-Петербург,2008. – 528 с.
3. В.А.Охорзин. Прикладная математика в системе MATHCAD. СПб:Лань,2008.-352 с.

**Кравченко Людмила Владимировна**

доктор технических наук, профессор

**Литвинов Владимир Николаевич**

кандидат технических наук, доцент

**Попов Антон Юрьевич**

кандидат технических наук, доцент